

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND VIII.

*I. Das Stokes'sche Gesetz;
von Eduard Hagenbach.*

Im Jahre 1852 hat bekanntlich Stokes¹⁾ in seiner bahnbrechenden Arbeit über Fluorescenz aus zahlreichen Versuchen das Gesetz abgeleitet, dass die Brechbarkeit der erregenden Strahlen die obere Grenze sei der Brechbarkeit der Bestandtheile des Fluorescenzlichtes, oder mit anderen Worten, dass im Fluorescenzlichte nie Strahlen enthalten seien, die brechbarer sind als die, welche die Fluorescenz erregen. Gegen dieses von verschiedenen Beobachtern bestätigte Gesetz trat im Jahre 1871 Lommel²⁾ auf und suchte aus seinen Versuchen zu zeigen, dass bei den Lösungen von Naphthalinroth (Magdalaroth) und von Blattgrün (Chlorophyll) durch Fluorescenz auch brechbarere Strahlen entstehen; Lommel nennt daher das Stokes'sche Gesetz nur eine Regel, und die fluorescirenden Körper werden von ihm in zwei Classen getheilt; die eine enthält die Substanzen, welche der genannten Regel gehorchen, und die andere die, welche ihr nicht gehorchen. In einer im Jahre 1872 publicirten experimentellen Arbeit³⁾ über die Fluorescenz von 36 verschiedenen Körpern hielt ich Lommel gegenüber das Stokes'sche Gesetz für alle fluorescirenden Substanzen, insbesondere auch für das Naphthalinroth, aufrecht. Zwei Jahre später veröffentlichte O. Lubarsch⁴⁾ eine Arbeit über Fluorescenz, in welcher

1) Pogg. Ann. Ergbd. IV. p. 238. 1854.

2) Pogg. Ann. CXLIII. p. 26. 1871.

3) Pogg. Ann. CXLVI. p. 65, 232, 375, 508. 1872.

4) Pogg. Ann. CLIII. p. 420. 1874.

er zuerst das Stokes'sche Gesetz bestätigte und dazu noch das weitere Gesetz beifügte, dass das Fluorescenzspectrum einer Substanz nie Strahlen enthalte, die an Brechbarkeit oberhalb des Absorptionsmaximums oder des Maximums im Fluorescenzspectrum liegen. Im Jahre 1876 erschien dann eine neue Arbeit von Lommel¹⁾ über Fluorescenz, in welcher er infolge mannichfacher Versuche mit Naphthalinroth, Chlorophyll und dem unterdessen entdeckten Eosin für diese drei Körper die Ausnahme von der Stokes'schen Regel festhielt und noch von drei neuen Körpern berichtete, dem Chamaelëinroth, dem Chamaelëinblau und dem Chamaelëingrün, welche beide Arten der Fluorescenz zeigen, die, welche von der Stokes'schen Regel abweicht, sowie die, welche derselben gehorcht. Diese Arbeit veranlasste mich aufs neue, Versuche zur Prüfung der Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes anzustellen; ich wiederholte so gut wie möglich die Versuche von Lommel und war infolge dessen auf dem Punkte, mit ihm Ausnahmen vom Stokes'schen Gesetze anzuerkennen, als ich bei genauerer Prüfung die Ursache meiner Täuschungen entdeckte und mich aufs neue von der Richtigkeit des genannten Gesetzes überzeugte. Diesem gegenüber stehen Versuche, die von B. Brauner²⁾ im physikalischen Institute zu Prag angestellt und zu Gunsten der Lommel'schen Anschauung interpretirt worden sind. Bei Gelegenheit der Versammlung deutscher Naturforscher in München im September 1877 hatte ich dann Gelegenheit, mich persönlich mit Lommel über das Stokes'sche Gesetz ausein-

1) Pogg. Ann. CLIX. p. 514. 1876. Bei dieser Gelegenheit theile ich mit, was mir die Untersuchung des Fluorescenzspectrums des Eosins ergeben hat. Das Spectrum beginnt bei 73 (30), ein erstes Maximum liegt bei 161 (45), ein Minimum bei 198 (52), ein zweites Maximum bei 273 (65) und das Ende des Spectrums bei 339 (76). Die Zahlen beziehen sich auf die in meiner frühern Arbeit über Fluorescenz angenommenen Scaln. Meine Resultate stimmen im wesentlichen mit den Angaben von Lommel überein.

2) Wiener Anzeiger Nr. XIX. p. 178—180. 1877. — Wied. Beiblätter II. p. 152. 1878.

der zu setzen; gegenüber seinen, in einem Vortrage vor der physikalischen Section geäußerten Ansichten über die Eintheilung der fluorescirenden Körper, je nachdem sie der Stokes'schen Regel gehorchen oder nicht, hielt ich an der Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes für alle fluorescirenden Substanzen fest.¹⁾ Von der Münchener Versammlung zurückgekehrt, habe ich dann noch eine grössere Reihe von Versuchen angestellt, die mich alle in der Anschauung bestätigten, dass bis jetzt eine Ausnahme von dem Stokes'schen Gesetze experimentell nicht erwiesen ist; die Versuche waren schon anfangs November 1877 abgeschlossen; anderweitige Arbeiten haben mich bis jetzt an der Publication derselben verhindert. Ich erwähne hier noch, dass Lubarsch²⁾ in seiner neuesten Arbeit der Ansicht von Lommel beigetreten, und dass vor kurzem eine Notiz von Lamansky³⁾ erschienen ist, der, gestützt auf seine Versuche über die Brechbarkeit des durch homogene Strahlen erregten Fluorescenzlichtes, an dem Stokes'schen Gesetze festhält.

Bevor wir nun zu der Beschreibung und Besprechung der nach verschiedenen Methoden angestellten Versuche übergehen, müssen wir noch einiges Allgemeine über die Intensität des Fluorescenzlichtes besprechen. Es ist dieser Gegenstand von Lommel⁴⁾ in einer besondern Abhandlung behandelt worden, und so gern ich das Verdienst des Verfassers anerkenne, durch einlässliche Erörterung der verschiedenen hier in Betracht kommenden Punkte manches ins richtige Licht gestellt zu haben, so kann ich doch mehrere der aufgestellten Sätze nicht anerkennen, und zwar gerade hauptsächlich die, welche von Lommel

1) Wied. Ann. III. p. 113. 1878. Amtlicher Bericht der 50. Versammlung deutscher Naturforscher u. Aerzte. München 1877. p. 113.

2) Wied. Ann. VI. p. 248. 1879.

3) Compt. rend. de l'Acad. d. Sciences. 9 juin 1879.

4) Pogg. Ann. CLX. p. 75. 1877.

zu Gunsten seiner Beobachtungsmethode gegenüber der meinigen verwerthet worden sind.

Wenn es sich um die Beurtheilung der Intensität des Fluorescenzlichtes im Spectralapparat handelt, so sind zwei Umstände in Betracht zu ziehen, nämlich einerseits die Art der Beleuchtung und die daraus folgende Leuchtkraft des fluorescirenden Körpers, und andererseits die Art der Beobachtung, d. h. die Stellung des Spectralapparates zu dem fluorescirenden Körper. Lommel hat gleich mit einer Formel die beiden einwirkenden Umstände zu umfassen gesucht, der leichtern Uebersicht wegen trennen wir die beiden Fragen und untersuchen zuerst, inwiefern die Lichtstärke im Spectralapparate von der Stellung desselben zum fluorescirenden Körper abhängt.

Wir bezeichnen die Leuchtkraft einer fluorescirenden Fläche, d. h. die bei senkrechtem Ein- und Ausfalle von der Oberflächeneinheit zu der in der Einheit abstehenden Oberflächeneinheit überstrahlende Lichtmenge, mit F ; bedeuten dann ω und ω_1 die Grössen der leuchtenden und der beleuchteten Fläche, d ihre Distanz, e den Emanationswinkel, d. h. den Winkel, den das aus der Fläche tretende Licht mit dem Lothe macht, und i den Incidenzwinkel, d. h. den Winkel, den das einfallende Licht mit dem Lothe der bestrahlten Fläche macht, so ist nach den seit Lambert in der Photometrie angenommenen Grundsätzen die von der Fläche ω auf die Fläche ω_1 strahlende Lichtmenge:

$$\frac{\omega \cdot \omega_1 \cdot F \cdot \cos i \cdot \cos e}{d^2}.$$

Es fragt sich nun vor allem, inwiefern diese Grundsätze der Photometrie für eine durch Fluorescenz leuchtende Fläche angenommen werden dürfen.

Die Abnahme mit dem Quadrate der Entfernung und die dem Cosinus des Incidenzwinkels proportionale Wirkung gelten für jede geradlinige Strahlung, und es ist somit nicht nöthig, dieselben für einen fluorescirenden Körper besonders zu rechtfertigen; immerhin habe ich zum Ueberfluss mich noch durch den Versuch davon überzeugt,

dass die Leuchtkraft der Fluorescenz bei schiefem Einfall des erregenden Lichtes merklich kleiner ist. Anders verhält es sich mit der Abhängigkeit vom Emanationswinkel, die einer besonderen Untersuchung bedarf.

Bekanntlich sind in dieser Hinsicht ganz verschieden ein glühendes Metallblech und eine breite Gasflamme; im ersten Falle gilt das Lambert'sche Gesetz, im zweiten Falle nicht. Man bemerkt diesen Unterschied schon mit blossem Auge, insofern das glühende Blech bei schiefem Ansehen gleich hell erscheint, wie bei senkrechtem Ansehen, während eine Gasflamme für das Auge heller wird, wenn man sie dreht. Mit Hülfe eines Photometers lässt sich dieser Unterschied noch deutlicher nachweisen. Man kann dabei entweder so verfahren, dass man die von dem ganzen Blech oder der ganzen Flamme ausgehende Lichtmenge auf das Photometer fallen lässt, oder so, dass man mit einem zur Richtung der auffallenden Strahlen senkrecht stehenden Diaphragma stets einen gleich grossen Lichtkegel abgrenzt. Im ersten Falle nimmt, wenn man von der senkrechten zu der schiefen Stellung übergeht, beim Bleche die Beleuchtung ab, bei der Gasflamme bleibt sie gleich; im zweiten Falle bleibt die Beleuchtung bei dem Bleche gleich und nimmt bei der Gasflamme zu. Es entsteht nun die Frage, ob eine durch Fluorescenz leuchtende Oberfläche sich in dieser Hinsicht verhalte wie ein glühendes Blech oder wie eine brennende Gasfläche. A priori wird man eher das erste erwarten dürfen; in Hinsicht auf die Erscheinungen des Glühens gehen in den meisten Punkten die flüssigen Körper mit den festen, und die Annahme einzelner, von einander getrennter, glühender Theilchen, die das eigenthümliche Verhalten der breiten Gasflamme erklärt, findet offenbar auf eine fluorescierende Oberfläche keine Anwendung. Auch sprechen theoretische Gründe für die Annahme der dem Cosinus des Winkels proportionalen Ausstrahlung aus einer Fläche, und zwar besonders die Reciprocität von Emanation und Incidenz, resp. Absorption. Den bestimmten Entscheid

Die Grösse der Spalte sei ω ; ein beliebiges Element der Fläche bei D_1 zwischen A_1 und B_1 sei $d\omega_1$, seine Distanz von der Spalte sei δ , der Winkel, den seine Normale mit der zur Spalte gezogenen Geraden bildet, sei e , und der Winkel, den diese Gerade mit der Normalen der Spaltöffnung oder der Axe des Collimatorfernrohres bildet, sei i . Wir beschreiben mit dem Radius D eine Kugel um die Spalte und projeciren aus dem Mittelpunkte das Element $d\omega_1$ auf die Kugel; das projecirte Element bei D_2 heisse $d\Omega$.

Es fällt nun auf die Spalte:

von dem Elemente $d\omega_1$:

$$\frac{F \cdot \cos i \cdot \cos e \cdot \omega \cdot d\omega_1}{\delta^2},$$

von dem Elemente $d\Omega$:

$$\frac{F \cdot \cos i \cdot \omega \cdot d\Omega}{D^2}.$$

Diese beiden Ausdrücke sind gleich; wir erhalten somit die gesuchte Lichtmenge, wenn wir den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck über die ganze Fläche $A_2 B_2$ integrieren. Es ist:

$$d\Omega = 2 \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \sin i \, di$$

und somit die auf die Linse auffallende Lichtmenge:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot F \cdot \omega \int_0^{i_1} \sin i \cdot \cos i \, di = \pi \cdot F \cdot \omega \cdot \sin^2 i_1.$$

Bezeichnet r den Radius der Linsenöffnung $C_1 C_2$, σ die Oberfläche derselben und a den Abstand der Spalte vom Rande der Linse, d. h. SC_1 , so ist:

$$\sin i_1 = \frac{r}{a} \quad \text{und also} \quad L = F \cdot \omega \cdot \frac{\sigma}{a^2}.$$

Die Stärke des Lichtes im Spectralapparate ist somit proportional der Leuchtkraft des fluorescirenden Körpers, der Grösse der Collimatorlinse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Grösse a , die nahezu gleich der Brennweite der Collimatorlinse ist. Die Lichtstärke ist jedoch vollkommen unabhängig von dem Abstände des Spectralapparates von der Oberfläche des fluorescirenden Körpers und von der Richtung der Axe des Collimatorfernrohres zu der leuchtenden Oberfläche. Diese Unab-

hängigkeit von Distanz und Schiefe gilt bekanntlich auch für die sogenannte sichtbare Helligkeit, die *claritas visa*, wie sie seiner Zeit von Lambert genannt worden ist. Da unser Satz in gleicher Weise für alle Farben gilt, so wird auch die Farbenmischung mit der Entfernung oder Schiefe der Beobachtung sich nicht ändern können.

Wir können somit folgenden von Lommel aufgestellten Sätzen unsere Zustimmung nicht geben:

Die Annäherung der Spalte des Spectralapparates an die fluorescirende Substanz vergrössert die absolute Lichtintensität.

Das Verhältniss des von der oberflächlichen Schicht herrührenden Fluorescenzlichtes zu dem aus grösserer Tiefe kommenden wird um so kleiner, aus je grösserer Entfernung man beobachtet.

Das Fluorescenzlicht zeigt bei Beobachtung aus grösserer Entfernung eine andere Farbenmischung, in welcher die absorbirbareren Strahlen in geringerem Verhältnisse vertreten sind.

Die bis jetzt angestellte Betrachtung gilt vorerst nur für eine leuchtende Fläche; bei einem fluorescirenden Körper haben wir nun aber mehrere Schichten übereinander, die alle mit einer nach innen zu abnehmenden Leuchtkraft ihr Licht nach aussen schicken. Insofern das Licht der unteren Schichten keine Absorption erleidet, wird für eine Reihe übereinander liegender Schichten dasselbe gelten wie für eine einzelne Schicht. Wenn jedoch die oberen Schichten das von unten kommende Licht absorbiren, so wird die Absorption eine Schwächung bewirken und unter Umständen auch die Farbenmischung modificiren; und dieser Einfluss wird mit der Schiefe des Ausfalls wachsen, jedoch nur in sehr unbedeutendem Grade, und zwar aus zwei Gründen. Erstens kommt bei einem stark fluorescirenden Körper das meiste Licht von Schichten, die sehr nahe an der Oberfläche liegen, und deren Ausstrahlung sehr wenig von der Absorption berührt wird, und zweitens ist der Emanationswinkel, der den Grenzwinkel der Totalreflexion nicht überschreiten kann, nie viel grösser als 45° , und der Cosinus nicht kleiner als

etwa 0,7. Es erklärt sich dadurch, dass es bei stark fluorescirenden Flüssigkeiten nicht möglich ist, mit der Neigung eine Aenderung der Helligkeit oder der Farbennuance wahrzunehmen; ich wenigstens war nicht im Stande, das eine oder das andere zu constatiren.

Aus den gemachten Erörterungen geht hervor, dass es, genau genommen, günstiger ist, mit dem Spectralapparate senkrecht auf die Fläche zu visiren, als schief, doch macht der Unterschied so wenig aus, dass wir ohne Bedenken den ganz allgemeinen Satz aufstellen können: *Die Stellung des Spectralapparates zu dem fluorescirenden Körper ist ohne wesentlichen Einfluss auf die Lichtstärke im Apparate.*

Dieser Satz gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die leuchtende Fläche den Oeffnungswinkel A_1SB_2 ganz ausfüllt; sobald das nicht mehr eintritt, wird natürlich mit zunehmender Entfernung der Fläche von der Spalte die Lichtstärke mit dem Quadrate der Entfernung abnehmen.

Bei meinen Beobachtungen habe ich deshalb gewöhnlich dafür gesorgt, dass der Oeffnungswinkel ausgefüllt war, was entweder durch Vergrößerung der beleuchteten Fläche oder durch Annäherung der Spalte erreicht werden konnte. Wenn jedoch die Verhältnisse das nicht gestatteten, so habe ich mir gewöhnlich dadurch geholfen, dass ich mit einer Linse den leuchtenden Fleck unmittelbar vor die Spalte projecirte und so mit dem Bilde des leuchtenden Fleckes den Oeffnungswinkel ausfüllte; es ist leicht zu ersehen, dass, abgesehen von dem verhältnissmässig geringen Lichtverluste, den die Linse durch Reflexion und Absorption bewirkt, auf diese Art genau die gleiche Lichtmenge dem Apparate zugeführt wird, wie wenn man das Licht direct von der den Oeffnungswinkel ganz ausfüllenden Fläche einfallen lässt.

In einzelnen Fällen habe ich auch, wie wir später sehen werden, nach Beseitigung des Collimators mit dem Beobachtungsfernrohre des Spectralapparates eine leuch-

tende Linie betrachtet; in diesem Falle gilt natürlich der obige Satz nicht, sondern es nimmt die Menge des dem Apparate zugeführten Lichtes mit der Entfernung ab; zu gleicher Zeit wird aber die Lichtlinie schmaler und somit das Spectrum reiner.

Wir gehen nun über zum Studium des Einflusses der Beleuchtungsart auf die Menge und Farbenmischung des in den Spectralapparat gelangenden Lichtes.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, das auffallende Licht sei parallel, und die Lichtintensität sei die Einheit und betrachten zuerst den Fall, wo das erregende Licht die fluorescirende Fläche senkrecht trifft. Wenn wir absehen von der Verminderung des Lichtes durch die Reflexion an der Oberfläche und den Extinctionscoefficienten für die betreffende Wellenlänge mit k bezeichnen, so ist die Beleuchtung einer Fläche, welche um die Grösse r unter der Oberfläche liegt:

$$e^{-kr}.$$

Die Leuchtstärke des von dieser Fläche ausstrahlenden, einer bestimmten Wellenlänge zugehörigen Fluorescenzlichtes ist der Stärke der Beleuchtung sowie dem Extinctionscoefficienten proportional; ausserdem müssen wir noch, wie dies Lommel gezeigt hat, multipliciren mit einem von der Concentration abhängigen Factor α und einer Grösse a' , welche ausdrückt, ein wie grosser Bruchtheil die Gesamtmenge des Fluorescenzlichtes der betreffenden Wellenlänge zugehört. Wir erhalten somit als Ausdruck der Leuchtkraft einer in der Tiefe r liegenden Schicht:

$$f = a' \cdot \alpha \cdot k \cdot e^{-kr} dr.$$

Wird nun von der gleichen Seite beobachtet, von welcher das Licht auffällt, so hat das Licht beim Ausstrahlen den Weg nochmals zurückzulegen. Bezeichnen wir mit k' den Extinctionscoefficienten für die in Betracht gezogene Farbe des Fluorescenzlichtes, so hat die einzelne Schicht nach aussen die Leuchtkraft:

$$f' = a' \cdot \alpha \cdot k \cdot e^{-(k+k')r} dr,$$

und alle Schichten bis zur Tiefe R liefern die Leuchtkraft:

$$F' = \int_0^R a' \cdot \alpha \cdot k \cdot e^{-(k+k')r} dr = a' \cdot \alpha \frac{k}{k+k'} \cdot \left(1 - e^{-(k+k')R}\right),$$

wobei sich F' nur auf eine bestimmte Wellenlänge bezieht, der auch a' und k' angehören.

Fallen Strahlen ein, deren Extinctionscoefficient k_1 , wobei angenommen wird, dass $k_1 > k$, so erhalten wir ebenso:

$$F'_1 = a' \cdot \alpha \frac{k_1}{k_1+k'} \cdot \left(1 - e^{-(k_1+k')R}\right)$$

und somit:

$$\frac{F'_1}{F'} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{k+k'}{k_1+k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k_1+k')R}}{1 - e^{-(k+k')R}},$$

oder bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von R :

$$\frac{F'_1}{F'} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{2 + (k_1+k')R}{2 + (k+k')R}.$$

Die Lichtintensität 1 wird infolge der Absorption in zwei Schichten von der Dicke R und den Extinctionscoefficienten k und k_1 reducirt auf:

$$A = 1 - e^{kR} \quad \text{und} \quad A_1 = 1 - e^{k_1R},$$

und somit haben wir:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1 - e^{k_1R}}{1 - e^{kR}},$$

oder bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von R :

$$\frac{A_1}{A} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{2 + k_1R}{2 + kR}.$$

Hieraus folgt, was Lommel auch durch Interpretation seiner Formeln erhalten hat, dass im fluorescirenden Spectrum jedem Maximum der Absorption ein an derselben Stelle gelegenes Maximum der Fluorescenz entspricht. Und da:

$$\frac{A_1}{A} > \frac{F'_1}{F'},$$

so ergibt sich auch, dass die Intensitätsunterschiede der Fluorescenzmaxima weniger schroff sind als die der Absorptionsmaxima; das heisst doch offenbar: die Unterschiede treten im Absorptionsspectrum deutlicher hervor als im fluorescirenden Spectrum; wie Lommel gerade das Gegentheil folgert und daraus die Thatsache erklären will, dass das Dasein schwacher Absorptionsmaxima im fluorescirenden Spectrum manchmal leichter wahrgenommen wird als im Absorptionsspectrum selbst, ist mir unverständlich; es muss hier wohl ein Missverständniss vorliegen.

Für den Fall, dass es sich um das Studium stark fluorescirender Substanzen handelt, nimmt man gewöhnlich die Flüssigkeit so tief, dass die unteren Schichten fast kein Licht mehr nach oben senden; in diesem Falle würde die Erscheinung nicht anders werden, wenn man die Tiefe der Flüssigkeit beliebig vergrössert; wir dürfen somit in solchen Fällen in dem obigen Ausdrucke R unendlich setzen und erhalten:

$$F' = a' \cdot \alpha \cdot \frac{k}{k + k'}.$$

Mit der Concentration ändert sich α und k ; nimmt man nun mit Lommel an, dass k mit der Concentration zunimmt, α aber mit derselben abnimmt, so ergibt auch unsere Formel wie die Lommel'sche das bekannte Resultat, dass mit wachsender Concentration die Leuchtkraft des Fluorescenzlichtes anfangs zu einem Maximum zu- und dann wieder abnimmt.

Vergleichen wir die Menge des Fluorescenzlichtes Φ , das nur von der oberflächlichen Schicht kommt, deren Dicke ϱ , mit der Menge Ψ , die von sämmtlichen tiefer gelegenen Schichten herrührt, so haben wir:

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\int_0^{\varrho} e^{-(k+k')e} de}{\int_e^{\infty} e^{-(k+k')e} de} = e^{(k+k')e} - 1.$$

Wächst k und wird zu k_1 , so haben wir:

$$\frac{\Phi_1}{\Psi_1} = e^{(k_1 + k')q} - 1.$$

Da $\frac{\Phi_1}{\Psi_1} > \frac{\Phi}{\Psi}$, so folgt, wie bei Lommel:

Das Verhältniss des von einer oberflächlichen Schicht ausgesandten Fluorescenzlichtes zu dem aus dem Innern kommenden wird mit wachsender Absorption grösser.

Für einen andern Theil des Fluorescenzlichtes, wo die entsprechenden Grössen a'' und k'' sind, wobei $k' > k''$, erhalten wir:

$$F' = a'' \cdot a \cdot \frac{k}{k + k''}$$

und somit:

$$\frac{F'}{F''} = \frac{a' k + k''}{a'' k + k'}.$$

$\frac{k + k''}{k + k'}$ ist unter obiger Annahme < 1 . Wächst k , während k'' und k' gleich bleiben, so nähert sich das Verhältniss der Einheit; es nimmt also $\frac{F'}{F''}$ mit wachsendem k zu und nähert sich dem Verhältniss $\frac{a'}{a''}$. Es folgt daraus auch hier, wie bei Lommel:

Das Intensitätsverhältniss der einzelnen Farben im Spectrum des Fluorescenzlichtes nähert sich, indem man zu stärker erregenden Strahlen übergeht, demjenigen im typischen Fluorescenzspectrum.

Wenn die Concentration zunimmt, und nach Lommel's Annahme k_1 , k' und k'' in dem nämlichen Verhältnisse wachsen, also übergehen in $\nu \cdot k_1$, $\nu \cdot k'$ und $\nu \cdot k''$, so ändert sich das obige Verhältniss nicht. Dem von Lommel aus seinen Formeln abgeleiteten Satze:

Die Farbenmischung des Fluorescenzlichtes ändert sich mit wachsender Concentration derart, dass die stärker absorbirbaren Bestandtheile immer mehr gegen die minder absorbirbaren zurücktreten.

können wir somit unsere Zustimmung nicht ertheilen. Auch beruht es nach unserer Ansicht auf einer Täuschung,

wenn Lommel glaubt, dass die Fluoreszenzfarbe des Naphthalinroths bei concentrirten Lösungen sich immer mehr ins Röthliche, und diejenige des Eosins sich mehr ins Olivengrüne ziehe. Wenn man gleich starkes Sonnenlicht auf zwei nebeneinander stehende Lösungen von Naphthalinroth oder Eosin wirft, von welchen die eine stark concentrirt, die andere mehr verdünnt ist, so beobachtet man deutlich, dass die concentrirtere schwächer fluorescirt, und man kann sich durch den blossen Anblick der beiden Fluorescenzen zur Annahme einer andern Farbennuance verleiten lassen. Wenn man jedoch entweder bei der stärkern Lösung die Intensität des einwirkenden Lichtes durch Concentration mit einer Linse steigert oder bei der stärker fluorescirenden schwächern Lösung durch schiefen Auffall vermindert und dadurch die zu vergleichenden Fluorescenzen gleich stark macht, so überzeugt man sich leicht, dass von einem Unterschiede der Farbennuance keine Rede ist.

Wir haben ferner zu untersuchen, welches die von Lubarsch angewandte Methode der Anwendung des Soret'schen fluorescirenden Oculars gibt.

Bezeichnen wir mit E' die Leuchtkraft einer fluorescirenden Schicht von der Dicke R , wenn das Licht in dem zur Beleuchtungsrichtung entgegengesetzten Sinne ausstrahlt, so haben wir:

$$E' = a' \cdot \alpha \cdot k \cdot \int_0^R e^{-(e \cdot (k-k') + Rk')} \cdot dr$$

$$= a' \cdot \alpha \cdot \frac{k}{k-k'} \cdot (e^{-kR} - e^{-k'R}).$$

Während F mit der Dicke der Schicht stets zunimmt, gilt das hier nicht; es wird E' gleich Null ebenso gut für $R = 0$ als für $R = \infty$. Bei wachsender Dicke der Schicht von 0 an nimmt also zuerst die Leuchtkraft bis zu einem Maximum zu, um dann bei weiterer Zunahme der Dicke wieder bis zu 0 abzunehmen. Das Maximum tritt ein für:

$$R = \frac{\log k - \log k''}{k - k''}.$$

Für kleine Werthe von R , wo die höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen, ergibt sich:

$$F' = a' \cdot \alpha \cdot k \cdot \left(R - (k + k') \cdot \frac{R^2}{2} + (k + k')^2 \frac{R^3}{6} \right),$$

$$E = a' \cdot \alpha \cdot k \cdot \left(R - (k + k') \cdot \frac{R^2}{2} + ((k + k')^2 - kk') \frac{R^3}{6} \right),$$

es ist also allerdings, wie Lommel behauptet, richtig, dass $E' < F'$, aber erst, wenn die dritte Potenz anfängt, sich geltend zu machen; für kleine R ist der Unterschied sehr unbedeutend, und es lässt sich also die Verwendung des fluorescirenden Oculars zum Studium der Fluorescenzerscheinungen, wenn wir stark fluorescirende Substanzen in dünnen Schichten anwenden, ganz wohl rechtfertigen.

Bedeutet wieder wie oben k'' den Extinctionscoëfficienten für eine andere Farbe des Fluorescenzlichtes, und ist $k'' < k'$; bedeuten ferner F' und F'' , sowie E' und E'' die den Werthen k' und k'' entsprechenden Werthe der nach vorn und nach hinten ausstrahlenden Lichtstärke, so haben wir nach Vernachlässigung der höheren Potenzen von R :

$$\frac{E'}{E''} = \frac{F'}{F''} \cdot \left(1 - \frac{a' \cdot \alpha \cdot k^2 \cdot R^3}{6} \cdot \left(\frac{k'}{F'} - \frac{k''}{F''} \right) \right),$$

$$\text{da } \frac{k''}{F''} < \frac{k'}{F'}, \text{ so ist also auch } \frac{E'}{E''} < \frac{F'}{F''}.$$

Wenn somit Lommel behauptet, dass bei Anwendung des fluorescirenden Oculars die stärker absorbirbaren Bestandtheile des Fluorescenzlichtes verhältnissmässig mehr geschwächt sind als bei der Beobachtung von vorn, so ist das auch nach der hier aufgestellten Formel richtig; aber aus dieser geht zugleich hervor, dass dieser Unterschied bei dünnen Schichten verschwindend klein ist; es kann somit dieselbe noch keinen Grund abgeben, die Methode zu verwerfen, wenn sie von anderer Seite sich empfiehlt.

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, wo das

erregende Licht schief auffällt. Der Einfallswinkel sei i und der dazu gehörige Brechungswinkel i_1 . Abgesehen von dem stärkern Lichtverluste durch Reflexion bei schiefem Einfalle wird auch die Beleuchtung und somit die Erregung geringer werden im Verhältnisse von $1 : \cos i$; ausserdem tritt durch Absorption ein grösserer Verlust ein, da das Licht, um zur Tiefe r zu gelangen, den Weg $\frac{r}{\cos i_1}$ zurücklegen muss; es wird somit bei schief auffallendem Erregungslichte die Leuchtkraft des senkrecht nach aussen strahlenden Fluoreszenzlichtes dargestellt sein durch:

$$F'_s = a' \cdot a \cdot \cos i \cdot \cos i_1 \cdot \frac{k}{k + k' \cos i_1} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{k}{\cos i_1} + k'\right) R} \right).$$

Wird die Schicht so tief genommen, dass R als unendlich angenommen werden darf, so haben wir:

$$F'_s = a' \cdot a \cdot \cos i \cdot \cos i_1 \cdot \frac{k}{k + k' \cos i_1}.$$

Es geht daraus hervor, dass F'_s stets kleiner ist als F' , dass man also nie und für keine Farbe durch schiefe Beleuchtung in Betreff der Leuchtkraft etwas gewinnen kann; was, wie schon oben erwähnt wurde, der Versuch ergibt.

Wir haben oben für senkrechten Einfall des erregenden Lichtes das Verhältniss der stärker absorbirbaren Bestandtheile des Fluoreszenzlichtes zu den minder absorbirbaren betrachtet und den Ausdruck gefunden:

$$\frac{F'}{F''} = \frac{a'}{a''} \cdot \frac{k + k''}{k + k'};$$

bei schiefem Auffalle finden wir ebenso:

$$\frac{F'_s}{F''_s} = \frac{a'}{a''} \cdot \frac{k + k'' \cdot \cos i_1}{k + k' \cdot \cos i_1}.$$

Hieraus geht hervor, dass, je grösser der Winkel, um so mehr $\frac{F'_s}{F''_s}$ sich dem Verhältnisse $\frac{a'}{a''}$ nähert. Es ist somit richtig, wenn Lommel behauptet, dass das beobach-

tete Fluorescenzspectrum dem typischen um so näher kommt, je schiefer die Strahlen einfallen; allein dabei ist in Betracht zu ziehen, dass i_1 nicht grösser werden kann als der Grenzwinkel der Totalreflexion, also $\cos i_1$ jedenfalls nicht kleiner als etwa 0,7; es wird somit der erreichte Vorthail auf ein sehr geringes Maass reducirt. Dabei ist ferner nicht zu vergessen, dass der Vorthail sich nur auf die relative Leuchtkraft bezieht; die absolute Leuchtkraft ist für alle Farben bei schieferm Auffalle des erregenden Lichtes stets schwächer; es ist also nie möglich, etwas im Fluorescenzspectrum dadurch deutlicher sichtbar zu machen, dass man vom senkrechten Einfalle zum schiefen übergeht.

Wir haben schliesslich noch den von Lommel nicht behandelten Fall zu betrachten, wo das erregende Licht durch eine erste Fläche seitlich (bei der Zeichnung in der Richtung des Pfeiles) einfällt, und das Fluorescenzlicht durch eine zweite zur ersten senkrechten Fläche von vorn beobachtet wird.

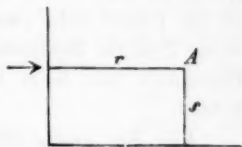


Fig. 2.

Bedeutet wie oben k den Extinctionscoefficienten für das erregende Licht und k' für das Fluorescenzlicht, so sendet ein Theilchen A , wenn das erregende Licht den Weg r und das Fluorescenzlicht den Weg s zurücklegt, nach aussen die Lichtmenge:

$$a' \cdot a \cdot k \cdot e^{-kr} \cdot e^{-k's} ds,$$

und die bis zur Tiefe S gehende Schicht liefert:

$$F'' = a' \cdot a \cdot \frac{k}{k'} \cdot e^{-kr} (1 - e^{-k'S}),$$

für $r = 0$, wird diese Grösse:

$$F_0'' = a' \cdot a \cdot \frac{k}{k'} \cdot (1 - e^{-k'S})$$

und, wenn S unendlich:

$$= a' \cdot a \cdot \frac{k}{k'}.$$

Da $F_0'' > F'$, so folgt, dass man durch das Mittel der seitlichen Beleuchtung noch stärkeres Fluorescenzlicht erhalten kann als bei der Beleuchtung von vorn; es ist deshalb auch zur Erkennung der Fluorescenz diese seitliche Beleuchtung bekanntlich sehr zweckmässig. Wenn sie beim Studium des Fluorescenzspectrums verwendet werden soll, so ist in Betracht zu ziehen, dass eine stark fluorescirende Schicht nur für ein verschwindend kleines r , also nur für eine ganz dünne Schicht das günstige Resultat gibt; es muss deshalb hier der fluorescirende Körper ganz nahe vor die Spalte gebracht werden. Bei Flüssigkeiten hat diese Beobachtungsmethode den Uebelstand, dass entweder das erregende oder das Fluorescenzlicht noch eine durchsichtige Wand durchsetzen muss; bei festen Körpern, aus denen man leicht Würfel schneiden kann, ist sie jedoch sehr zweckmässig, und ich habe sie auch seiner Zeit zur Bestimmung des Fluorescenzspectrums beim Flussspath und beim Uranglase mit gutem Erfolge verwendet.

Aus den angestellten Betrachtungen über die Intensität des Fluorescenzlichtes ergibt sich für uns, dass, abgesehen von der soeben besprochenen und nur in einzelnen Fällen praktisch verwerthbaren Methode der seitlichen Beleuchtung, die günstigsten Resultate erhalten werden, wenn das erregende Licht senkrecht auffällt, und die Beobachtung senkrecht von vorn stattfindet. Der Abstand des fluorescirenden Körpers von der Spalte des Spectralapparates ist dabei gleichgültig, sobald nur die leuchtende Fläche den Oeffnungswinkel des Collimators ganz ausfüllt. — Diese Bedingungen waren gewöhnlich bei meinen Versuchen erfüllt.

Wir gehen nun über zu der Beschreibung der Beobachtungen, die zur Untersuchung der Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes angestellt worden sind; wir ordnen sie in folgende Gruppen:

1. Versuche mit prismatischer Zerlegung des Lichtes:
 - a. mit Anwendung des Spectralapparates;
 - b. durch Beobachtung des abgeleiteten Spectrums.
2. Versuche ohne prismatische Zerlegung des Lichtes mit complementär gefärbten Medien.

Wir beschreiben zuerst die mit dem Spectralapparate angestellten Versuche. Bei allen diesen wird zur Erregung Licht angewendet, das entweder homogen ist oder eine bestimmte Grenze der Brechbarkeit nach oben nicht überschreitet; es ist dann einfach zu entscheiden, ob das Fluorescenzlicht diese Grenze nach oben zu überschreitet oder nicht.

Eine der einfachsten Arten, sich homogenes Licht zu verschaffen, besteht in der Darstellung eines reinen Spectrums, aus dem man mit einer Spalte einen bestimmten schmalen Theil herausschneidet. Das reine Spectrum kann man entweder mit zwei Spalten und Prisma, oder mit Spalt, Linse und Prisma erhalten; ich habe beide Methoden angewandt, halte aber die zweite für praktischer, da man bei grösserer Lichtstärke eine wenigstens ebenso grosse Reinheit des Spectrums erzielen kann, sobald man die achromatische Linse so stellt, dass die das Licht gebende und die das Licht ausschneidende Spalte conjugirte Punkte in Bezug auf die Linse bilden. Das Prisma pflege ich bei Anwendung von Sonnenlicht in den Brennpunkt der Linse zu stellen, weil da das Lichtbündel am dünnsten ist und somit leicht auch ein schmales Prisma ganz durchsetzt.

Wurde in der angegebenen Weise homogenes Licht aus der Gegend der Linie *D* genommen, mit einer Linse auf eine weisse Thonplatte concentrirt, dann das von dieser zerstreute Licht mit Spiegel und Linse auf die Spalte des Spectralapparates geworfen, so sah man im Spectralapparate nur gelbes Licht; stellte man nun das Fadenkreuz auf das brechbarere Ende ein und tröpfelte eine Lösung von Naphthalinroth auf die Thonplatte, so zeigte

sich sofort im Spectrum grünes Licht, und das Spectrum ging sehr merklich über das Fadenkreuz nach der brechbareren Seite hinaus. Diese Beobachtung schien beim ersten Anblicke ganz entschieden für die Ansicht von Lommel und die Nichtgültigkeit des Stokes'schen Gesetzes in dem vorliegenden Falle zu sprechen. Eine genauere Prüfung des Versuches zeigte aber, dass hier eine Täuschung vorlag, und dass das grüne Licht schon vorher in dem erregenden Lichte vorhanden war und dabei nur übersehen wurde, weil das Auge von dem starken gelben Lichte zu sehr geblendet war. Hiervon überzeugte ich mich, wenn im Beobachtungsfernrohre statt des Fadenkreuzes eine Blendung angewandt wurde, welche die den weniger brechbaren Strahlen, entsprechende Hälfte des Gesichtsfeldes verdeckte und mit einem senkrechten scharfen Rande abschnitt. Wird nun mit dieser Blendung das stark erregende gelbe Licht bei Anwendung des das Licht zerstreuernden Thones im Spectralapparate verdeckt, so sieht man sehr deutlich, dass sich das Spectrum nach der brechbareren Seite noch ziemlich weit erstreckt; wird dann Naphthalinroth auf den Thon geträufelt, so bemerkt man durchaus keine Vermehrung des Lichtes überhaupt, sondern nur eine Verkürzung des nicht verdeckten Theiles des Spectrums, gleichsam eine Zusammenziehung desselben; es ist das ganz begreiflich, da nun das zerstreute Licht in die Grenze des Fluorescenzspectrums fallen muss. Der angestellte Versuch gibt also durchaus keinen Beweis für die Ausnahme von dem Stokes'schen Gesetze, sondern er besagt nur, dass man dem Auge für die Untersuchung der Bestandtheile des erregenden Lichtes die gleiche Empfindlichkeit geben muss, wie für die Untersuchung des Fluorescenzlichtes; ich habe deshalb von da an stets an Stelle des Fadenkreuzes zur Einstellung des Beobachtungsfernrohres und zur Bestimmung der Grenze des Spectrums mich der erwähnten Blendung bedient. Die Einstellung auf das Ende des Spectrums geschah so, dass der Rand der Blendung von der weniger brechbaren nach der brech-

bareren Seite so lange vorgeschoben wurde, bis alles Licht im Gesichtsfelde verschwunden war; und dann wurde die Lage des Randes der Spalte an der Scala im Fernrohre abgelesen; und damit dies ohne Parteilichkeit geschah, wurde die Scala erst nach geschעהner Einstellung beleuchtet.

Um bei den entscheidenden Versuchen das Spectrum möglichst rein zu erhalten, wurde das aus einem scharfen Spectrum mit einer Spalte herausgeschnittene Licht nochmals mit Prisma und Linse ausgebreitet und dann zum zweiten male ein schmaler Theil mit einer Spalte herausgenommen. Dieses gleichsam zweimal gesiebte Licht wurde dann entweder auf Thon oder auf Naphthalinroth geworfen und das zerstreute Licht mit dem Spectralapparate analysirt. Die Grenze des Spectrums wurde nach der soeben beschriebenen Methode mit der Blendung bestimmt; die folgende Tabelle gibt die Resultate der Ablesung; I. Ende bedeutet die Grenze des noch deutlich sichtbaren Lichtes, II. Ende die Stelle, wo auch die letzte Spur von Licht aufhört. Die Natriumlinie war bei der Zahl 391. Dem brechbaren Theile entsprechen kleinere Zahlen.

Zerstreuung durch			
Thon		Naphthalinroth	
I. Ende	II. Ende	I. Ende	II. Ende
392	375	390	376
390	368	390	375
390	370	392	379
391	367	391	376
391	370	390	376
391	374	391	376
Mittel: 391	371	391	376

Bei diesen Versuchen war das erste Spectrum mit zwei Spalten dargestellt, während bei den folgenden beide male hintereinander zur Darstellung des reinen Spectrums Spalte und achromatische Linse verwendet wurden.

Thon		Zerstreuung durch	
		Naphthalinroth	
I. Ende	II. Ende	I. Ende	II. Ende
403	385	403	386
402	382	400	384
402	384	402	385
401	380	402	385
402	385	400	386
401	380	401	385
Mittel: 401,8	388	401,3	385

Die Zahlen 401,8 und 401,3 sind offenbar als gleich zu betrachten.

Man liess nun das erregende Licht auch noch durch eine Lösung von Morinthonerde gehen, welche für den brechbareren Theil des Spectrums eine starke Absorptionsfähigkeit besitzt; dadurch wurde das II. Ende zurückgeschoben, aber in ganz gleicher Weise für das erregende Licht wie für das Fluorescenzlicht.

Der Versuch wurde auch noch so angestellt, dass man bei Anwendung des Thones zur Zerstreuung die Blendung so weit vorschob, bis gerade alles Licht verdeckt war, und das Gesichtsfeld absolut dunkel erschien; wenn dann Naphthalinroth an die Stelle des Thones gebracht wurde, konnte keine Aufhellung des Gesichtsfeldes bewirkt werden.

In allen diesen Fällen konnte also keine Ausnahme von dem Stokes'schen Gesetze constatirt werden; das gleiche Resultat wie Naphthalinroth gaben verschiedene andere fluorescirende Körper, mit denen dieser Versuch ebenfalls angestellt wurde, so unter andern das Eosin und das Fluoresceïn.

In einer Privatcorrespondenz mit Hrn. Lommel bin ich von diesem darauf aufmerksam gemacht worden, dass bei der Untersuchung des erregenden Lichtes der helle Schein, der sich im Spectralapparate nach Bedeckung des starken Lichtes mit der Blendung als eine Art Aureole noch zeigt, nicht sicher auf das Vorhandensein brechbarer Bestandtheile schliessen lasse, da dieses Licht von

einer Zerstreuung an der Collimatorlinse und am Prisma herühre. Ich gebe zu, dass, besonders wenn der das Licht zerstreuende Körper nahe bei der Spalte ist, und somit stark divergirendes Licht auf dieselbe wirkt, Reflexionen und Zerstreuungen an den Rändern der Spalte, an den Wänden und an der Linse des Collimators störend einwirken können; es war diese Ansicht auch bei mir unter anderem ein Grund dafür, dass ich es vermied, die Spalte zu nahe an den das Licht zerstreuenden Körper zu bringen. Immerhin ist nach meiner Ansicht diese Zerstreuung nur etwas störend für die Beobachtung, aber durchaus nicht im Stande, die weitere Ausdehnung des Spectrums beim erregenden Lichte nach der brechbareren Seite zu erklären. Um jedoch auch diesen Einwendungen entgegen zu treten, habe ich bei dem folgenden Versuche die Anordnung getroffen, dass jede solche Zerstreuung an den Theilen des Collimators zur Unmöglichkeit wurde.

Wie bei den früheren Versuchen verschaffte ich mir vorerst durch zweimalige Zerlegung des Sonnenlichtes im Prisma eine mit möglichst homogenem Lichte beleuchtete Spalte; das scharfe Bild dieser Spalte wurde auf ein mit Naphthalinroth gefülltes Fläschchen projicirt und die fluorescirende Linie mit dem Spectralapparat ohne Spalte und Collimator aus einer Distanz von 8 m beobachtet. Das Fläschchen hatte eine schwarze Sammetfläche als Hintergrund, und auch sonst wurde auf die Abblendung des fremden Lichtes alle mögliche Sorgfalt verwendet. Das Spectrum ist in diesem Falle lichtschwach; es muss deshalb die Empfindlichkeit des Auges möglichst gross sein, was dadurch erreicht wurde, dass ich während der Zeit der Beobachtung wie ein Photograph mit einem schwarzen Tuche zugedeckt war. Bei dieser Beobachtungsweise erschien das Spectrum auf vollkommen schwarzem Grunde, sodass von einer falschen Aureole keine Rede sein konnte. Auf das Fläschchen war ein Stückchen Papier geklebt, und durch leichte Drehung desselben konnte man das Licht entweder auf das fluorescirende Naphtha-

linroth oder auf das diffus zerstreuende Papier fallen lassen. Folgende Zahlen geben eine auf diese Weise angestellte Versuchsreihe.

Papier		Zerstreuung durch	
		Naphthalinroth	
Ende		Ende	
307	305	309	305
308	305	308	305
308	302	307	304
305	303	305	302,5
Mittel: 305,4		Mittel: 305,7	

Die Abnahme der Zahlen bei den späteren Versuchen erklärt sich offenbar aus der Zunahme der Empfindlichkeit des Auges infolge des längern Verweilens im Dunkel. Zur Controle stellte ich noch die Blendung zuerst auf 303 ein; es war sowohl beim Papier als beim Naphthalinroth absolut dunkel; stellte ich dann auf 304, so war in beiden Fällen eine Spur von Licht erkennbar.

Bei den bisherigen Versuchen bestand das erregende Licht nur aus einem mit einer Spalte aus dem Spectrum herausgeschnittenen Theile; bei den folgenden wurde zur Erregung der ganze unter einer bestimmten Grenze liegende Theil des Spectrums verwendet. Zu diesem Zwecke wurde das scharfe Spectrum auf eine grosse Linse geworfen, mit einem Schirme der brechbarere Theil an einer bestimmten Stelle scharf abgeschnitten und der concentrirte Rest zur Erzeugung der Fluorescenz benutzt. Auch hier liess man abwechselungsweise das Licht auf zerstreuernden Thon und fluorescirendes Naphthalinroth fallen; mit dem Spectralapparate wurde dann in beiden Fällen das erste und das zweite Ende des Spectrums, d. h. das Ende des deutlichen Spectrums und das Aufhören der letzten Lichtspuren bestimmt, und ausserdem noch in dem Spectrum des Fluorescenzlichtes die Lage des Maximums abgeschätzt. Das erste Ende bei dem erregenden Lichte entspricht offenbar der Stelle, wo der Schirm das Spectrum abschneidet, und das darüber hinausgehende schwache Licht

ist eine Folge davon, dass das Spectrum nicht vollkommen rein ist; es entspricht somit auch im Fluoreszenzspectrum das vom ersten zum zweiten Ende gehende schwache Licht der durch dieses falsche Licht hervorgerufenen Fluorescenz. Bei der folgenden Versuchsreihe wurde der das Spectrum abschneidende Schirm von der brechbareren Seite vorgeschoben, und ich gebe die Versuche erst von da an, wo der Schirm bis in die Gegend von *E* vorge-
rückt war.

Zerstreuung durch				
Thon		Max.	Naphthalinroth	
I. Ende	II. Ende		I. Ende	II. Ende
344	321	375	364	346
352	328	375	365	346
361	321	375	363	346
369	316	377	369	355
372	285	383	372	356
374	285	385	374	355
378	285	388	379	357
384	285	390	384	365

Die dazu gehörige Lage der Fraunhofer'schen Linien ist:

<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>b</i>	<i>F</i>
396,5	374,5	346	341	320

Aus dieser Versuchsreihe ist deutlich zu erkennen, dass, solange von dem erregenden Lichte nur die Strahlen weggenommen werden, welche brechbarer sind, als das Fluoreszenzlicht, die Natur des Fluoreszenzspectrums unverändert bleibt. Sobald aber der abschneidende Schirm über die dem Ende des Fluoreszenzspectrums entsprechende, etwa in der Mitte zwischen *E* und *D* liegende Stelle hinausgerückt ist, zeigt sich ebensowohl eine dem Vorrücken des Schirmes entsprechende Verkürzung des Fluoreszenzspectrums, als auch eine Verschiebung des Maximums nach der weniger brechbaren Seite. Gerade diese Verschiebung des Maximums ist ein deutlicher Beweis dafür, dass der Charakter des Spectrums nicht unverändert bleibt, wenn die erregenden Strahlen andere sind.

Von dieser Thatsache kann man sich auch dadurch

überzeugen, dass man von der mit den verschiedenen Theilen eines möglichst reinen Spectrums beleuchteten Spalte ein scharfes Bild auf die Oberfläche der fluorescirenden Flüssigkeit wirft und diese scharfe Linie durch Beobachtung mit einem Prisma von gerader Durchsicht ausbreitet.

Wir gehen nun über zu den Versuchen, wo Natriumlicht zur Erregung der Fluorescenz verwendet wird. Um eine starke Natriumflamme zu erhalten, wurden in einen grossen Bunsen'schen Brenner mit drei Röhren sechs Sodaperlen gebracht. Das Licht wurde dann durch Linsen concentrirt und, wie bei den früheren Versuchen, entweder auf zerstreuenden Thon oder auf die fluorescirende Flüssigkeit geworfen und dann mit dem Spectralapparate analysirt. Die Versuche ergaben, dass das Fluorescenzlicht nur dann grünes Licht enthielt, wenn auch im erregenden Lichte brechbarere Strahlen als die Natriumlinie enthalten waren. Das letztere findet aber stets statt, und zwar nicht nur deshalb, weil der Bunsen'sche Brenner ohne Sodaperle auch schon brechbarere Strahlen liefert, sondern offenbar, weil die Sodaflamme ausser dem gasförmigen metallischen Natrium auch noch etwas glühendes festes, ein continuirliches Spectrum lieferndes Natron enthält. Nimmt man durch Absorption mit Morinthonerdelösung oder, noch besser, mit Eosinlösung im erregenden Lichte den brechbareren Theil weg, so verschwindet auch sofort alles Grün im Spectrum des Fluorescenzlichtes.

Es wurden auch einige Versuche angestellt über die Fluorescenzerrregung mit Licht, das durch mehrere rothe Gläser gegangen war; auch dabei war es nie möglich, durch die Fluorescenz mit Naphthalinroth Licht im Spectralapparate zu erhalten, wenn die Blendung so gestellt war, dass es bei der Untersuchung des von der Thonplatte zerstreuten Lichtes vollkommen dunkel war.

Wir gehen nun über zu den Versuchen mit dem abgeleiteten Spectrum. Es ist das die Methode, welche von

Stokes eingeführt und später unter anderen auch von Victor Pierre¹⁾ angewandt worden ist, und die darin besteht, dass ein möglichst schmales Spectrum, ein sogenanntes Linearspectrum, auf die freie Oberfläche der fluorescirenden Substanz geworfen und dann durch ein Prisma, dessen brechende Kante mit der Ausdehnung des Linearspectrums parallel geht, beobachtet wird. Da die Oberfläche der Flüssigkeit infolge des auf ihr liegenden Staubes stets auch Licht zerstreut, so erhalten wir dann einerseits das abgelenkte Spectrum des erregenden Lichtes (das primitive Spectrum nach Stokes) als eine schiefe gerade Linie und andererseits das abgeleitete Spectrum des Fluoreszenzlichtes (das derivirte Spectrum nach Stokes) als eine Fläche, die in der schematischen Zeichnung schraffirt ist. Wenn nun

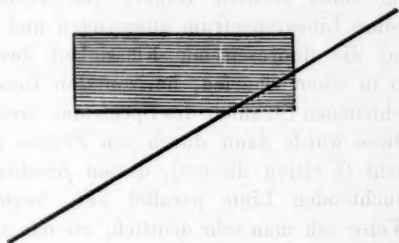


Fig. 3.

die Ansicht von Lommel richtig ist, so wird das abgeleitete Spectrum überall die gleiche Breite haben und also mit dem in der Zeichnung punktirten Dreiecke über die schiefe Linie hinausgreifen, während nach dem Stokes'schen Gesetze das abgeleitete Spectrum nur bis an die schiefe Linie heranreicht und gleichsam von dieser abgeschnitten wird. Die von V. Pierre gelieferten Zeichnungen zeigen sämmtlich diese abgeschnittenen Ecken; es handelte sich also darum, zu untersuchen, ob auch bei dem Naphthalinroth und den anderen nach Lommel die Stokes'sche Regel nicht befolgenden Substanzen ein solches schiefes Abschneiden oder ein Uebergreifen stattfindet.

Um diese Beobachtungsmethode zum Entscheide der

1) Wien. Ber. LIII. II. p. 704. 1866.

Streitfrage benutzen zu können, suchte ich vorerst ein möglichst lichtstarkes und reines Linearspectrum auf die Flüssigkeitsoberfläche zu werfen. Es geschah dies in folgender Weise. Ich verschaffte mir zuerst einen kleinen, stark leuchtenden Punkt dadurch, dass ich das Sonnenlicht horizontal auf eine achromatische Linse von 8,5 cm Durchmesser (das Objectiv eines Fraunhofer'schen Fernrohrs) warf und in dem Brennpunkte auf einer Blendung mit ganz feiner Oeffnung vereinigte. Das von dieser als einem leuchtenden Punkte ausstrahlende Licht wurde dann mit Hülfe einer achromatischen Linse und zwei zusammen um einen rechten Winkel ablenkenden Prismen in ein reines Linearspectrum ausgezogen und von oben senkrecht auf die fluorescirende Flüssigkeit geworfen; man erhielt so in einer scharfen, horizontalen Linie die von den verschiedenen Strahlen des Spectrums erregten Fluorescenzen. Diese wurde dann durch ein Prisma mit gerader Durchsicht (*à vision directe*), dessen brechende Kante mit der leuchtenden Linie parallel lief, beobachtet. Auf diese Weise sah man sehr deutlich, wie das abgeleitete Spectrum des Fluoreszenzlichtes von dem abgelenkten Spectrum des erregenden Lichtes schief abgeschnitten wird und nicht darüber hinausreicht. Um die schief abschneidende Linie des abgelenkten Spectrums recht deutlich zu sehen, wurde etwas Bärlappsaamen oder sonstiger Staub auf die Oberfläche der Flüssigkeit gestreut.

Das gleiche Resultat wie Naphthalinroth gaben Eosin, Fluoresceïn und andere fluorescirende Körper.

Die letzte Versuchsreihe bezieht sich auf die Anwendung complementärer Medien, eine Methode, die auch von Stokes¹⁾ eingeführt worden ist. Wenn es möglich wäre, zwei Medien zu erhalten, von welchen das erste alles Licht oberhalb einer bestimmten Stelle des Spectrums absorbiert und alles unterhalb durchlässt, das zweite alles Licht unterhalb der gleichen Stelle absorbiert und alles oberhalb

1) Pogg. Ann. XCI. p. 158. 1854 u. XCVI. p. 522. 1855.

durchlässt, so wäre die Frage, ob durch den Vorgang der Fluorescenz die Brechbarkeit nur vermindert oder auch erhöht werden kann, leicht zu entscheiden.

Der Versuch wäre folgendermassen anzustellen. Man lässt directes, durch eine Linse concentrirtes Sonnenlicht durch das eine Medium auf einen das Licht ohne Fluorescenz zerstreuen den Körper fallen und beobachtet die stark beleuchtete Stelle mit dem Auge durch das zweite Medium. Der Fleck muss vollkommen dunkel sein, und zwar sowohl, wenn das Licht durch das erste Medium einfällt und die Beobachtung mit dem Auge durch das zweite Medium stattfindet, was wir die erste Stellung nennen; als wenn das Licht durch das zweite Medium einfällt und die Beobachtung durch das erste Medium stattfindet; was wir die zweite Stellung nennen. Wird nun an die Stelle des nur zerstreuen den Körpers ein fluorescirender gebracht, so muss eine Erhöhung der Brechbarkeit ihn sichtbar machen bei der ersten, nicht aber bei der zweiten Stellung; eine Erniedrigung der Brechbarkeit muss ihn sichtbar machen bei der zweiten, nicht aber bei der ersten Stellung; und wenn zugleich Erhöhung und Erniedrigung der Brechbarkeit eintritt, so muss er in beiden Fällen sichtbar werden.

Es ist nicht wohl möglich, zwei Medien zu finden, die dem gewünschten Erfordernisse vollkommen entsprechen und das Spectrum ganz scharf an jeder gewünschten Stelle abschneiden; wir müssen uns also damit begnügen, den angestrebten Zweck annäherungsweise zu erreichen.

Brauner in Prag versuchte mit Prismencombinationen, die auf dem Princip der Totalreflexion beruhen, das Gewünschte zu verwirklichen. Zwei durch eine Luftschicht getrennte, mit den Hypothenusenflächen aufeinander gelegte, rechtwinkelige Crownglasprismen sollen bei bestimmter Stellung das Spectrum unterhalb *D* auslöschen und oberhalb *D* durchlassen; es entspricht das dem Desiderate für unser zweites Medium; während als erstes Medium zwei mit den Hypothenusenflächen aufeinandergelegte und durch eine Schicht Cassiaöl getrennte Flintglasprismen

dienen sollen, indem dieselben bei einer bestimmten Stellung das Spectrum oberhalb D durch Reflexion beseitigen und nur die Strahlen unterhalb D durchlassen. Die Anwendung solcher Prismen ergab dem Beobachter das Resultat, dass trockenes Papier sowohl in der ersten als in der zweiten Stellung dunkel blieb, während mit Lösungen von Naphthalinroth oder Eosin getränktes Papier in beiden Fällen aufleuchtete, aber viel intensiver bei der zweiten Stellung. Es wird daraus geschlossen, dass zwar bei den genannten fluorescirenden Körpern eine Abweichung von der Stokes'schen Regel eintrete, dass aber Licht mit erniedrigter Brechbarkeit viel intensiver sei als mit erhöhter Brechbarkeit.

Den Versuch mit solchen Prismencombinationen habe ich nicht wiederholt, sie standen mir für den Moment nicht zur Verfügung; auch stellte die kurze Notiz von Brauner Versuche mit vollkommeneren Apparaten in Aussicht, die ich vorerst abwarten wollte. Immerhin muss es schwierig sein, ganz richtig functionirende Medien mit solchen Prismencombinationen zu erhalten, da die Zerstreuung von Licht dabei leicht störend einwirkt, und da auch eine solche Prismencombination schwerlich das Spectrum hinlänglich plötzlich und scharf abschneidet. Ich suchte deshalb mit absorbirenden Medien dem gewünschten Ziele möglichst nahe zu kommen.

Man kann sich leicht Combinationen von rothen Kupfergläsern einerseits und grünen Chromgläsern andererseits verschaffen, von welchen jede für sich in hohem Grade durchsichtig ist, die aber zusammen das weisse Sonnenlicht so vollkommen auslöschen, dass eine Thonplatte oder ein weisser Kiesel im concentrirten Lichte des Brennpunktes ganz dunkel bleiben. Wendet man nun solche Combinationen an und träufelt dann auf die Thonplatte eine Lösung von Naphthalinroth, so leuchtet es bei der zweiten Stellung hell auf, während es bei der ersten Stellung absolut dunkel bleibt. Der Unterschied bei den beiden Stellungen ist in so hohem Grade auffallend, dass

dieser Versuch mir der anschaulichste Beweis für die Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes zu sein scheint. Man kann allerdings einwenden, dass durch die genannten Versuche zweifellos die Erniedrigung der Brechbarkeit bewiesen werde; dass es aber immer noch möglich wäre, dass auch in geringem Grade eine Erhöhung eintrete und sich dieselbe nur nicht zeige, da sie innerhalb der Gegend des Spectrums bleibt, die von beiden Medien absorbirt wird. Allein jedenfalls wird schlagend durch den vorliegenden Versuch dargethan, dass der von Lommel aufgestellte Satz, nach welchem jeder direct oder indirect absorbirte Strahl nach Maassgabe seiner Absorptionsfähigkeit das nämliche Fluorescenzspectrum erregt, nicht richtig sein kann; denn das Fluorescenzlicht, welches erregt wird von dem durch das rothe Glas gegangenen Lichte, ist deutlich verschieden von dem, welches erregt wird von dem durch das grüne Glas gegangenen Lichte; das erstere wird vollkommen von einem grünen Glase absorbirt, das letztere aber nicht.

Uranglas, festes Eosin, Lösungen von Eosin, Fluoresceïn und Chlorophyll geben bei Untersuchung mit complementären rothen und grünen Gläsern das gleiche Resultat wie Naphthalinroth.

Zwei andere complementär gefärbte Medien, die ebenfalls sehr gut zum Nachweise der Fluorescenz und zum Beweise des Stokes'schen Gesetzes dienen können, sind eine Lösung von Morinthonerde einerseits und von Kupferoxydammoniak andererseits. Man kann damit auch leicht die Fluorescenz bei grünen Blättern, Papier und Kreide, und die Abwesenheit der Fluorescenz bei rothen Blättern (Blättern in der Herbstfarbe oder von rothen Rüben), bei Thon und bei Quarz nachweisen.

Aus den verschiedenen in dieser Arbeit vorgeführten Versuchen ziehe ich den Schluss, dass einstweilen kein Grund vorliegt, das Stokes'sche Gesetz zu verwerfen, und dass auch die von Lommel gegebene Eintheilung der

fluorescirenden Körper auf keinem wesentlich verschiedenen Verhalten derselben beruht.

Lommel¹⁾ hat auch noch eine ausführliche Theorie der Fluorescenz gegeben; ich gebe gern zu, dass dieselbe manche gute Ideen enthält; allein eine grosse Bedeutung kann ich ihr nicht zuerkennen, da ich immer noch bei dem schon früher ausgesprochenen Satze bleibe, dass alle Theorien der Fluorescenz, aus denen das Stokes'sche Gesetz nicht folgt, oder aus denen gar eine Abweichung vom Stokes'schen Gesetze sich ableiten lässt, nach meiner Ansicht keinen Anspruch auf Annehmbarkeit machen können.

Basel, im Juli 1879.

II. *Experimentaluntersuchung zur Bestimmung der Brechungsexponenten verflüssigter Gase; von L. Bleekrode.*

(Erste Mittheilung.)

Seitdem durch die Versuche von Pictet und Cailletet bewiesen worden ist, dass auch die sogenannten permanenten Gase in den tropfbaren Zustand versetzt werden können, haben wir bis jetzt nur wenige Eigenschaften derselben kennen gelernt, so u. A. die Temperatur und den Druck, bei denen diese Substanzen ihre Aggregatzustände ändern. Andréef's Versuche²⁾ beziehen sich auf das specifische Gewicht und die Ausdehnung der flüssigen Kohlensäure, schwefliger Säure, des Ammoniaks und Stickoxyduls. Gore verdanken wir den Einblick in die chemischen Eigenschaften der flüssigen Kohlensäure, Chlorwasserstoffsäure, des Cyans und der Fluorwasserstoffsäure;

1) Wied. Ann. III. p. 251. 1878.

2) Ann. d. Chem. u. Pharm. 1859. p. 1.

schliesslich habe ich selbst im vorigen Jahre¹⁾ Resultate über das Leitungsvermögen der meisten dieser Körper für sehr starke electriche Ströme mitgetheilt. Die Erfahrung, die ich in Betreff der Manipulation dieser oft gefährlichen Substanzen durch jene Arbeit erhalten habe, hat es mir sehr nahe gelegt, neue Forschungen auf diesem Gebiete anzustellen. Ich habe mich zunächst der Bestimmung der Brechungsexponenten dieser Substanzen zugewendet, da ausser dem des Cyans und der Cyanwasserstoffsäure²⁾ nichts darüber bis jetzt veröffentlicht ist.

Ich wählte zuerst, um die Gase flüssig zu erhalten, die Methode der Faraday'schen Röhren, da durch diese am bequemsten kleine Mengen der Flüssigkeit hinlänglich rein erhalten werden; sie ist aber dann meist in unregelmässig gekrümmte Röhren eingeschlossen. Ungleich einfacher und einer experimentellen Bestimmung leichter zugänglich gestaltet sich die Sache, wenn das Mikroskop dabei zur Beobachtung benutzt wird, wobei bekanntlich die Flüssigkeit zwischen planparallelen Wänden eingeschlossen sein muss. Die Lösung der Frage bot dann nur dadurch technische Schwierigkeiten, dass nur Gefässe von kleinen Dimensionen brauchbar waren, welche unter das Mikroskop gebracht werden konnten. Doch gelang es mir schliesslich, geeignete Gefässe zu erhalten, deren gegenüberliegende Wände mit kleinen Spiegelplatten verschlossen waren und bei Verbindung mit dem Gasentwickelungsrohre hinlänglich mit dem verflüssigten Gase gefüllt werden konnten. Es liess sich aber auf diese Weise nur mit dem Cyan, der Kohlensäure und dem Ammoniak arbeiten; die übrigen Gase, wie schwefelige Säure, Chlorwasserstoffsäure, Chlor u. s. w. griffen den zur hermetischen Schliessung dienenden Kitt an, wodurch die Gefässe oft explodirten, oder die Flüssigkeit darin trübe wurde. Deshalb mussten Gefässe ohne jeden Kitt hergestellt werden. Ich war des-

1) Wied. Ann. III. p. 161. 1878.

2) Cooper bestimmte denselben mittelst eines Prismas schon 1839 (Pogg. Ann. XLVII. p. 527) zu 1,275 für den Cyanwasserstoff.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. VIII.

halb genöthigt, meine erste Versuchsreihe zu beendigen, deren Resultate ich vorläufig hier mittheile.

Ich hatte bei Hrn. Nachet in Paris ein für diese Experimente bestimmtes Mikroskop anfertigen lassen, bei dem die geradlinige Bewegung der Objectivröhre mittelst Scala und Nonius und einer Mikrometerschraube nöthigenfalls bis $\frac{1}{400}$ und $\frac{1}{500}$ mm gemessen werden konnte. Wird das Objectiv auf irgend ein Probeobject scharf eingestellt und nachher die Flüssigkeit zwischen parallelen Wänden zwischen beide gebracht, so ist eine neue Einstellung des Objectivs zur scharfen Beobachtung jenes Objectes erforderlich. Nennt man diese Verstellung d , die Dicke der Flüssigkeitsschicht D , ihren Brechungsexponenten N , so ist (freilich nur annäherungsweise):

$$N = \frac{D}{D-d}.$$

D und d lassen sich leicht vermittelst des Mikroskopes bestimmen, sowie die Correction wegen der Dicke der Glasplatten. In einer zweiten vollständigen Mittheilung werde ich die Einrichtung der Gefäße nebst den erforderlichen Vorkehrungen zur möglichst genauen Beobachtung eingehend besprechen. Doch lässt sich schon die Brauchbarkeit und der erreichbare Grad von Genauigkeit der Methode beurtheilen aus den folgenden beim Wasser und Schwefeläther mit diffusum Sonnenlichte und mit der Bunsen'schen Gasflamme mit Chlornatrium, also in Natriumlicht erhaltenen Resultaten ersehen.

Tabelle I. Wasser.

Tabelle II. Aether.

	D	d	N	Andere Beob.	D	d	N	Andere Beob.
	mm	mm			mm	mm		
Natriumlicht . .	5,48	1,38	1,337		5,49	1,46	1,362	
	5,58	1,37	1,333		7,78	2,52	1,351	
	7,74	1,93	1,332	1,334	10,52	2,78	1,359	
Mittel	1,334	1,332	1,357	1,356
Sonnenlicht . .	7,74	1,97	1,341		10,52	2,76	1,354	
	10,52	2,68	1,342		5,48	1,44	1,356	
	5,48	1,38	1,337		5,49	1,43	1,352	
	5,49	1,40	1,340		7,74	2,03	1,354	
Mittel	1,340	1,336	1,354	1,358

Jeder der in obigen Tabellen angeführten Versuche ist das Mittel aus einer Reihe von fünf oder sechs Beobachtungen bei verschiedenen Einstellungen des Objectivrohres auf die Scala. Der Fehler beträgt höchstens 0,3 Proc. des totalen Werthes. Wenn man dabei bedenkt, dass andere Methoden, wie die Minimalablenkung oder die Totalreflexion experimentell ungleich viel mehr Schwierigkeiten darbieten würden, schon weil beträchtliche Quantitäten des flüssigen Gases erforderlich sind, so dürfte der befolgte Weg für diesen Fall doch sehr brauchbar erscheinen.

Zunächst prüfte ich das flüssige Cyan und die Kohlensäure; ersteres löste bloß nach längerer Zeit etwas Kitt, war aber durch Rückdestillation wieder farblos zu erhalten. Kohlensäure griff den Kitt stark an, ohne ihn zu lösen, konnte aber doch zwei oder drei Tage im Rohre und Gefässe aufbewahrt bleiben.¹⁾ Ich erhielt folgende Resultate:

Tabelle III. Cyan.

	D	d	N
	mm	mm	
Sonnenlicht .	12,36	3,01	1,322
Temp. 13° C.	—	3,02	1,323
	—	3,04	1,326
	—	3,03	1,325
	—	3,05	1,328
	—	3,03	1,325
Mittel	1,325
Natriumlicht	12,36	3,04	1,326
	—	2,97	1,316
	—	3,04	1,326
	—	2,96	1,315
	—	2,98	1,318
	—	2,99	1,319
Mittel	1,320

Tab. IV. Kohlensäure.

	D	d	N
	mm	mm	
Sonnenlicht .	6,13	0,86	1,163
Temp. 18½° C.	—	0,87	1,165
	—	0,89	1,170
	—	0,88	1,168
	—	0,91	1,174
	—	0,87	1,165
Mittel	1,168
Natriumlicht	6,13	0,84	1,159
Temp. 19° C.	—	0,87	1,165
	—	0,85	1,161
	—	0,88	1,168
	—	0,86	1,163
Mittel	1,163

1) Es scheint dieses eine eigenthümliche Wirkung der flüssigen Kohlensäure auf den in dem Kitten enthaltenen Kohlenwasserstoff zu sein, wahrscheinlich von derselben Art, wie Gore beim Kautschuk beobachtete, der, nachdem er der Wirkung der flüssigen Säure ausgesetzt

Mit Rücksicht auf den oben bestimmten Werth der Brechungsexponenten scheint es mir nicht ohne Interesse, Folgendes zu bemerken. Im Jahre 1826 veröffentlichte D. Brewster einige Untersuchungen über die physikalischen Eigenschaften von Flüssigkeiten in den Höhlungen gewisser Mineralien. Namentlich im Topase beobachtete er zwei solche übereinander gelagerte Substanzen, welche miteinander nicht mischbar und in ihrer Ausdehnung durch Wärme sehr verschieden waren. Er versuchte über ihre Natur auch dadurch zu entscheiden, dass er ihre Brechungsindices bestimmte. Dabei theilte er den Werth $N = 1,316$ für Cyan mit, ohne jedoch die von ihm benutzte Methode anzudeuten. Die Uebereinstimmung zwischen unseren Zahlen ist indess als befriedigend zu betrachten.¹⁾

Dagegen wird von den in den Mineralien eingeschlossenen Flüssigkeiten ausdrücklich erwähnt, dass der Brechungsindex vermittelst der Totalreflexion gemessen wurde, und derselbe in einem sibirischen Amethyst $= 1,2106$, im brasilianischen Topas für die erstere, wenig durch Wärme ausdehnbare Flüssigkeit $N = 1,2946$, und für die stark ausdehnbare $N = 1,1311$ bei einer Temperatur von 13° C. bestimmt. Es lässt sich aus den Zahlen, welche Brewster über Temperatur und correspondirendes Volumen mittheilt, sogar der Ausdehnungscoefficient berechnen; man erhält den Werth $0,01497$, welcher mit dem aus den Thilorier'schen Versuchen für flüssige Kohlensäure herzuleitenden²⁾, $0,015$ pro 1° C., gut übereinstimmt. Simmler, der auf diese Uebereinstimmung aufmerksam machte, hält sie für einen wichtigen Beleg dafür, dass die eine eingeschlossene Flüssigkeit wirklich flüssige Kohlensäure war,

war, sich beim Herausnehmen zum sechs- bis achtmaligen Volumen ausdehnte, nachher wieder zum vorigen Volumen zurücksank. (Proc. Roy. Soc. XI. p. 86.)

1) Auch fehlt in der Originalabhandlung die Temperaturangabe (Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh T. X. p. 407). Es wird bloss erwähnt, dass Dr. Turner das flüssige Cyan durch Druck bereitete.

2) Pogg. Ann. CV. p. 462. 1858.

welche von Brewster leicht übersehen wurde, eben weil dieser Aggregatzustand damals sehr wenig bekannt war; doch fiel ihm die ausserordentlich starke Ausdehnung sehr auf.

Der Werth von N scheint nicht mit dem von mir bestimmten im Einklange zu stehen. Indess können wegen der schwer zu bestimmenden Form der Höhlung und ihres sehr geringen Volumens leicht Beobachtungsfehler bei der Bestimmung gemacht worden sein. Die Herren Vogel-sang und Geissler haben in ihrer wichtigen Arbeit über die Natur der Flüssigkeitseinschlüsse in gewissen Mineralien¹⁾ durch Spectralanalyse und auch direct durch Reaction auf Kalkwasser gezeigt, dass gerade im Bergkrystalle, im brasilianischen Topas und im Amethyst Einschlüsse von Kohlensäure und Wasser angetroffen werden. Auch Brewster ist in seiner Abhandlung der Ansicht, dass die eine Flüssigkeit in ihrem optischen Verhalten und ihrer sehr geringen Ausdehnung dem Wasser sehr ähnlich sei. Für reines Wasser würde also der beobachtete Werth um $1,3358 - 1,2946 = 0,0412$ zu gering sein. Mit dieser Zahl sollte dann auch der Brechungsexponent der zweiten (weit mehr expansiblen) Flüssigkeit als Correction vermehrt werden müssen, da dieser ja unter den nämlichen Umständen und also mit demselben Fehler gemessen wurde. Dann bekommt man als verbesserten Werth $1,1311 + 0,0412 = 1,1723$, also sehr nahe den von mir bestimmten Index (1,168), der bei etwas höherer Temperatur erhalten wurde, als bei Brewster's Versuchen und daher geringer ausfallen musste.²⁾ Dieser Einfluss der Tempe-

1) Pogg. Ann. CXLII. p. 56 u. 257. 1871.

2) Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass die Zahlen von Brewster und mir nicht nothwendig für die flüssige Kohlensäure übereinzustimmen brauchen, da nicht unbedingt anzunehmen ist, dass die eingeschlossenen Flüssigkeiten in den genannten Mineralien immer Kohlensäure oder wenigstens reine Kohlensäure sind. Dies ergibt sich aus den Mittheilungen von Brewster, da beim Zerschlagen der Gesteine in einigen Fällen die Flüssigkeit explosionsartig verschwand,

ratur scheint bei der flüssigen Kohlensäure, wie auch zu erwarten war, sehr gross zu sein; ich gedenke ihn in der folgenden Mittheilung durch eine specielle Versuchsreihe darzulegen. Mit der Natriumflamme erhielt ich bereits bei 21° C. den Werth 1,159 als Mittel aus sechs Beobachtungen, während es bei 19° C. 1,163 war.

Der Brechungsexponent des flüssigen Ammoniaks ist in Tab. V enthalten. Dasselbe wurde aus Chlorcalcium entwickelt, das mit dem Gase gesättigt war.

Tabelle V. Ammoniak.

Tab. VI. Zinkäthyl.

	<i>D</i>	<i>d</i>	<i>N</i>		<i>D</i>	<i>d</i>	<i>N</i>
	mm	mm			mm	mm	
Sonnenlicht	16,23	3,89	1,315			7,93	1,489
Temp. 17½° C.	—	3,85	1,311	24,14	7,94	1,490	
	—	3,87	1,313	—	7,92	1,488	
	—	3,90	1,316	—	7,94	1,490	
	—	3,88	1,314	—	7,91	1,487	
Mittel	1,314	—	7,92	1,488	
				Mittel	1,489	

Die Ammoniakflüssigkeit zeigte grosse Neigung zur Resorption, wodurch sie schnell ihre Temperatur ändern musste; demzufolge wird vielleicht obiger Werth etwas modificirt werden müssen.

in anderen hingegen sich an der Oberfläche der Stücke verbreitete und da bis zwölf Minuten bleiben konnte, ehe sie mit Hinterlassung eines Rückstandes verdunstete. Simmler (a. a. O. p. 460) glaubt hier an starre Kohlensäure denken zu können; bei den sehr geringen Quantitäten der Einschlüsse kommt mir dieses doch sehr unwahrscheinlich vor. Auch haben neuerdings Erhard und Stelzner versucht, die kritische Temperatur der Kohlensäure zu bestimmen, in der Voraussetzung, dass diese flüssig im Topase eingeschlossen war, und erhielten 28,15° bis 29,10° statt 30,92° nach Andrews; sie schlossen daher auf Verunreinigungen durch beigemischte Gase. Die Uebereinstimmung zwischen den Werthen der Ausdehnungscoefficienten aus den Exponenten von Brewster und Thilorier ist als zufällig zu betrachten. Die dadurch erhaltene Zahl 0,01497 bezieht sich auf Temperaturgrenzen von 10° bis 27° C., während die genauen Versuche von Andréef erst bei 20° bis 25° C. nur den Werth 0,01277 angeben. Meine Bestimmung der Brechungsexponenten der reinen Kohlensäure kann also für mineralogische Zwecke von Interesse sein.

Die angewendete Methode ist auch sehr gut für diejenigen Verbindungen zu verwenden, welche zwar bei gewöhnlicher Temperatur flüssig sind, jedoch ihrer Entzündlichkeit wegen auf gewöhnliche Weise schwierig zu untersuchen sind. Als Beispiel führe ich hier noch das Zinkäthyl an, dessen Brechungsindex ich in einem speciell für diesen Zweck construirten gläsernen Gefässe bestimmte, worin es mir gelang, die Flüssigkeit zwischen parallelen Wänden hinlänglich rein einzuschliessen.

Tabelle VI zeigt, dass der Index des Zinkäthyls sich den Werthen der anderen Metallradicale, wie Quecksilberäthyl (1,5397, *D*-Linie), Stannäthyl (1,4714, *D*-Linie), Quecksilbermethyl (1,5319, *D*-Linie), anreihet. Doch unterscheidet sich dasselbe von jenen Verbindungen dadurch, dass es, der Luft ausgesetzt, sich heftig entzündet; es liefert also abermals einen Beweis, dass die Eigenschaft der Brennbarkeit nicht nothwendig mit einem grossen Brechungs-exponenten verknüpft zu sein braucht.

Ich hoffe nächstens die Resultate einer zweiten Versuchsreihe zu veröffentlichen, welche die Bestimmung der Brechungsexponenten der meisten übrigen flüssigen Gase zum Zwecke hat, und welche jetzt theilweise mit Hülfe eines Cailletet'schen Compressionsapparates und mit Faraday'schen Röhren ausgeführt wird, die derart abgeändert sind, dass sie auch die Anwendung eines Glasprismas gestatten können.

Haag, Juli 1879.

III. *Die wahre Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen; von H. F. Weber in Zürich.*

In dem classischen Versuche, durch welchen Thomas Young die gegenseitige Interferenz zweier Wellensysteme demonstirte, wurde die Interferenz durch Wellen erzeugt,

die erhebliche Diffraction erlitten hatten. Young's Interferenzerscheinung ist eine reine Diffractionserscheinung.

Fresnel sah in diesem Charakter des Young'schen Versuches eine Complication und versuchte, die Interferenz auf einfachere Weise, mit Ausschluss der Diffraction herzustellen. Er glaubte, dieses Ziel durch seinen Doppelspiegel und durch sein Doppelprisma völlig erreicht zu haben; er sagt ausdrücklich: „les franges produites par un verre prismatique ou par deux miroirs formant un angle très-obtus n'appartiennent pas à la diffraction, puisqu'elles ne sont point formées par des rayons diffractés ou infléchis, mais par deux faisceaux lumineux régulièrement réfléchis ou réfractés.“ (Mém. sur la diffraction de la lumière, p. 446). Von dieser Anschauung aus musste er folgenden Zusammenhang zwischen der Lichtstärke H in irgend einem Orte Q des Interferenzraumes, der Lage dieses Ortes und der Wellenlänge λ gewinnen:

$$H = 4 H_0 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 4 H_0 \cdot \cos^2 \frac{2\pi \delta y}{\lambda (a + w)},$$

wo r_1 und r_2 die Entfernungen bedeuten, welche der Ort Q von den beiden virtuellen Bildern der die Interferenz erzeugenden Lichtlinie besitzt, wo 2δ der gegenseitige Abstand dieser beiden Bilder ist, wo y die seitliche Entfernung des Ortes Q von der durch die gemeinschaftliche Kante des Interferenzapparates und durch die Mitte zwischen den beiden virtuellen Lichtbildern gelegten Ebene bedeutet, wo $a + w$ die Entfernung des Ortes Q von der durch diese beiden Bilder geführten Ebene angibt, und wo endlich H_0 eine gewisse Constante darstellt. Hiernach würden die durch den Doppelspiegel oder das Doppelprisma erzeugten Interferenzerscheinungen folgenden einfachen Gesetzen unterworfen sein:

1) Alle Interferenzfransen, die demselben $a + w$ entsprechen, haben genau gleiche Breite:

$$B = \frac{\lambda (a + w)}{2\delta};$$

2) Diese Breite wächst für dasselbe δ und λ genau proportional mit der Entfernung $a + w$;

3) Die Helligkeitsminima sind sämmtlich untereinander gleich, und zwar gleich Null;

4) Die Helligkeitsmaxima haben ebenfalls sämmtlich die gleiche Lichtstärke $4 \cdot H_0$;

5) Bei Anwendung von weissem Lichte zur Herstellung der Interferenz ist die mittlere Zone der centralen Franse stets weiss und auf beiden Seiten von einem gelblichen, weiter nach aussen roth gefärbten Saume umgeben.

Fresnel hat versichert, durch Beobachtung und Messung alle diese Consequenzen seiner Theorie bestätigt gefunden zu haben. Unzählige male sind seit Fresnel's Tagen die Fresnel'schen Interferenzen als Grunderscheinungen erzeugt worden, und alle Beobachter haben die Uebereinstimmung der Fresnel'schen Theorie mit den Erscheinungen anerkannt.

Diese Uebereinstimmung zwischen der Theorie und der Wirklichkeit besteht aber nicht; eine genauere Betrachtung der Fresnel'schen Interferenzen lässt erkennen, dass keine einzige der soeben genannten Folgerungen der Theorie den Erscheinungen entspricht.

Die Breiten der Interferenzfransen sind für dieselbe Entfernung $a + w$ ganz beträchtlich ungleich. In gewissen Entfernungen $a + w$ ist die centrale Franse schmaler als ihre Nachbarn, letztere breiter als die darauf folgenden Frans en u. s. w.; andere Entfernungen $a + w$ gibt es, in denen das Umgekehrte stattfindet; in bestimmten Entfernungen $a + w$ endlich sind die mittleren Frans en genau gleich breit.

Die Werthe der verschiedenen Helligkeitsminima sind deutlich wahrnehmbar verschieden.

Die Helligkeitsmaxima sind ganz beträchtlich ungleich; die schmäleren Frans en haben schwächere Maxima, die breiteren Frans en stärkere Maxima. Diese Ungleichheit

der Lichtstärkemaxima ist so gross, dass sie schon auf den ersten Blick geradezu eindringlich in die Augen fällt.

Die mittlere Zone der centralen Franse zeigt sich bei Beleuchtung des Interferenzapparates mit weissem Lichte niemals weiss, sondern immer gefärbt. Die Art der Färbung wechselt mit der Entfernung von der gemeinschaftlichen Kante des Interferenzapparates in der buntesten Weise. Geht man von der Nähe des Interferenzapparates aus, der Richtung der wachsenden w entlang, so gewahrt man folgende Reihenfolge von Färbungen in der mittlern Zone der centralen Franse:

weiss	grüngelb	gelb
gelblichweiss	gelb	orange
gelb	braungelb	lichtroth
braungelb	rothbraun	grünlichgelb
fleischroth	lichtroth	gelblichweiss
blaugrau	lavendelgrau	weisslich
grünlichgrau	grünlichgelb	u. s. w.

Die Erscheinungen stehen also in vollem Widerspruche mit der Fresnel'schen Theorie. Die letztere muss also auf falschen Principien beruhen.

Schon die blosse Betrachtung der Form des von Fresnel gegebenen Helligkeitsausdruckes drängt übrigens zu der Ueberzeugung hin, dass Fresnel's Theorie unrichtig sein muss. Die Erfahrung zeigt, dass die Interferenz, d. h. eine oscillirende Lichtintensität, nur innerhalb eines ganz bestimmt begrenzten Raumes auftritt, und dass ausserhalb dieses Raumes constante Helligkeit vorhanden ist. Diese eigenthümliche räumliche Vertheilungsweise der Lichtstärke ist aber in Fresnel's Intensitätsformel nicht enthalten.

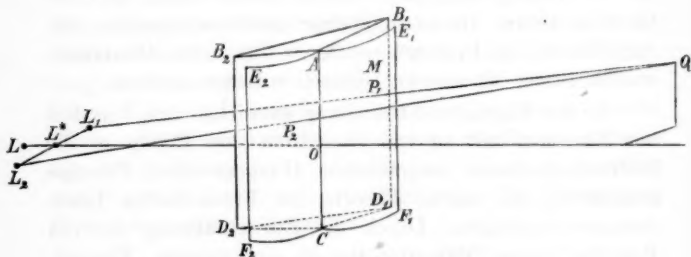
Eine eingehende Reflexion über das Zustandekommen der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen deckt den Fehler in Fresnel's Theorie auf. Die von Fresnel ohne jede weitere Begründung gemachte Annahme, dass in seinen Interferenzerscheinungen keine Diffractionswirkungen vor-

kommen, ist unrichtig. Die Fresnel'schen Interferenzerscheinungen sind ebenso reine Diffractionerscheinungen wie die Young'schen; die ersteren werden durch die Combination zweier innerer Diffractionssysteme hervorgebracht, die letzteren resultiren durch das Zusammenwirken zweier äusserer Diffractionssysteme.

In der folgenden Abhandlung entwickle ich, von dem von Fresnel mit so viel Scharfsinn und Erfolg in die Diffractionstheorie eingeführten Huygens'schen Principe ausgehend, die exacte Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen. Durch die Zurückführung der von Fresnel in die Diffractionstheorie eingeführten „Fresnel'schen Integrale“ auf zwei mit den Bessel'schen Functionen in engstem Zusammenhange stehende transcendente Functionen gewinne ich einen verhältnissmässig sehr einfachen allgemeinen Ausdruck der Lichtintensität, welche in irgend einem Orte des Interferenzgebietes vorhanden ist. In einer nähern Betrachtung dieses allgemeinen Helligkeitsausdruckes wird sodann gezeigt, dass ein vollkommener Einklang besteht zwischen der aus den Principien der Diffraction entwickelten Theorie und den beobachtbaren Erscheinungen.

1. Um einen bestimmten Fall zu haben, möge angenommen werden, die zu behandelnde Interferenzerscheinung werde durch das Fresnel'sche Doppelprisma erzeugt. Die für diesen Fall erhaltenen Resultate lassen sich unmittelbar auf den Fall übertragen, in welchem die Interferenz mit Hülfe des Fresnel'schen Doppelspiegels hergestellt wird. Es sei (s. Fig. p. 412) L die punktförmige Lichtquelle und $AB_1B_2CD_1D_2$ das Doppelprisma mit vertical stehenden brechenden Kanten. Die Lichtquelle möge so gelegen sein, dass das von ihr auf die hintere Fläche $B_1B_2D_1D_2$ des Doppelprisma herabgelassene Loth durch die den beiden Prismen gemeinsame Kante AC in O hindurchgeht. Die durch LO gehende horizontale Ebene möge als horizontale Hauptebene, die durch L und die

Kante AC gelegte Ebene als verticale Mittelebene bezeichnet werden.



Die von der punktförmigen Lichtquelle L ausgehende sphärische Wellenfläche tritt nach dem Durchgange durch das Doppelpisma in Form zweier gleicher, rechteckig begrenzter sphärischer Wellenflächen ACE_1F_1 und ACE_2F_2 hervor, von denen die erstere ihren Mittelpunkt in L_1 , die andere in L_2 haben möge. Die Linie L_1L_2 liegt in der horizontalen Hauptebene; die Abstände der Orte L_1 und L_2 von der Geraden LO sind gleich; die Mitte der Geraden L_1L_2 sei mit L^* bezeichnet, der Abstand $L^*L_1 = L^*L_2$ sei gleich δ gesetzt. Die horizontal laufende Seite der rechteckigen Begrenzung der sphärischen Wellenflächen habe die Länge b ; die vertical laufende Seite dieser Begrenzung sei von der Länge h . Die Strecke L^*O sei mit a bezeichnet. Die Längen b und h sind sehr klein gegenüber der Entfernung a .

Die auf den beiden sphärischen Wellenflächen gelegenen Aethertheilchen haben in jedem Zeitmomente übereinstimmende Bewegungszustände. Um den einfachsten Fall der Rechnung zu haben, nehmen wir an, die von diesen Aethertheilchen ausgeführten Oscillationen seien geradlinig und überall gleich gerichtet. Der Ausdruck für die Ausweichung s_1 aus der Gleichgewichtslage eines auf der Wellenfläche ACE_1F_1 gelegenen Aethertheilchens zur Zeit t sei:

$$s_1 = A \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bezeichnen wir mit s_2 die zu derselben Zeit stattfindende Ausweichung aus der Gleichgewichtslage für ein auf der Wellenfläche ACE_2F_2 gelegenes Aethertheilchen, so ist ebenfalls:

$$s_2 = A \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die zu lösende Aufgabe ist: die Lichtintensität zu finden, die durch das Zusammenwirken der von diesen beiden Wellenflächen ausgehenden Oscillationen in irgend einem Orte Q des Raumes hervorgerufen wird.

Zur Lösung dient das Fundamentalprincip der Diffractionstheorie, das Huygens'sche Princip. Ist M der Ort irgend eines Flächenelements $d\omega$ der beiden Wellenflächen, bezeichnet q die Entfernung dieses Ortes von dem Orte Q , für welchen die Lichtintensität gesucht wird, und bedeutet S die resultirende Ausweichung, welche durch das Zusammenwirken aller der von den beiden Wellenflächen ausgehenden Oscillationen in Q zur Zeit t erzeugt wird, so ist:

$$S = \int \frac{A}{\lambda q} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{q}{\lambda} \right) d\omega,$$

wo λ die Wellenlänge der von den Wellenflächen ausgehenden Oscillationen darstellt, und wo die Integration über alle Elemente der beiden Wellenflächen auszudehnen ist. Dabei ist die Voraussetzung gemacht, dass der Winkel zwischen der Verbindungslinie q und der in M nach aussen gerichteten Normale der Wellenfläche so klein ist, dass sein Cosinus der Einheit gleich gesetzt werden darf.

Das auszuwerthende Integral kann als die Summe zweier Theile betrachtet werden:

$$S = \int \frac{A}{\lambda q_1} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{q_1}{\lambda} \right) d\omega_1 + \int \frac{A}{\lambda q_2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{q_2}{\lambda} \right) d\omega_2 = S_1 + S_2;$$

in dem ersten Theile bezieht sich die Integration nur auf die sämmtlichen Elemente der Wellenfläche ACE_1F_2 ; in dem letzten nur auf die Elemente der Wellenfläche

ACE_2F_2 . Zur Berechnung dieser beiden Flächenintegrale möge ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt werden, dessen Anfangspunkt in L^* liegt, dessen z -Axe die Richtung $L^* \rightarrow O$ hat, dessen y -Axe in die Richtung $L^* \rightarrow L_1$ fällt, und dessen x -Axe vertical nach oben läuft. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem ersten Integrale S_1 und drücken die Grössen ϱ_1 und $d\omega_1$ durch Coordinatenwerthe aus.

Das beliebige Element $d\omega_1$ der Wellenfläche ACE_1F_1 habe die Coordinaten $x_1y_1z_1$; die Coordinaten des Ortes Q seien xyz . Es ist dann:

$$\varrho_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1.$$

Es gelten aber die Gleichungen:

$$x^2 + (y - \delta)^2 + z^2 = r_1^2 \quad \text{und} \quad x_1^2 + (y_1 - \delta)^2 + z_1^2 = r^2,$$

wenn r_1 die Länge QL_1 und r den Radius der sphärischen Wellenfläche ACE_1F_1 bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich unter der Voraussetzung, dass die Glieder vierter Ordnung $\left(\frac{x}{r_1}\right)^4, \left(\frac{x_1}{r}\right)^4, \left(\frac{y-\delta}{r_1}\right)^4, \left(\frac{y_1-\delta}{r}\right)^4, \dots$ gegen eins verschwindend klein sind, folgende Werthe für z und z_1 ableiten:

$$z = r_1 - \frac{x^2}{2r} - \frac{(y-\delta)^2}{2r}, \quad z_1 = r - \frac{x_1^2}{2r} - \frac{(y_1-\delta)^2}{2r}.$$

Durch Verwendung der vier letzten Gleichungen lässt sich der obige Werth von ϱ_1^2 in folgende Form bringen:

$$\varrho_1^2 = (r_1 - r)^2 + \frac{r_1}{r} \left[x_1 - x \frac{r}{r_1} \right]^2 + \frac{r_1}{r} \left[y_1 - \frac{y r + \delta (r_1 - r)}{r_1} \right]^2.$$

Werden die Verhältnisse so gewählt, dass die kleinen Grössen vierter Ordnung $\left[\frac{x_1, x, y_1, y, \delta}{r_1 - r, z, a} \right]^4$ verschwindend klein gegen eins sind, so erhält ϱ_1 den Werth:

$$\varrho_1 = r_1 - r + \frac{z}{2a(z-a)} \left[x_1 - x \frac{a}{z} \right]^2 + \frac{z}{2a(z-a)} \left[y_1 - \frac{y a + \delta (z-a)}{z} \right]^2.$$

Ersetzen wir endlich das Flächenelement $\delta\omega_1$ in erster Annäherung durch seine Projection $dx_1 dy_1$ auf die xy -Ebene, und stellen wir wegen der geringen Variation, welche die Entfernung ϱ_1 von Flächenelement zu Flächenelement erleidet, den Factor $\frac{1}{\varrho_1}$ als angenähert constant, und zwar als gleich $\frac{1}{z-a}$, vor das Integralzeichen, so erhalten wir als sehr angenähert richtigen Werth des ersten Integrals S_1 folgenden Ausdruck:

$$S_1 = \frac{A}{\lambda(z-a)} \int_{x_1=-h_0}^{x_1=h-h_0} \int_{y_1=0}^{y_1=b} \cos \left\{ 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} - \frac{r_1}{\lambda} - \frac{z}{2a(z-a)\lambda} \left(x_1 - \frac{xa}{z} \right)^2 - \frac{z}{2a(z-a)\lambda} \left(y_1 - \frac{ya + \delta(z-a)}{z} \right)^2 \right] \right\} . dx_1 dy_1,$$

in welchem die Länge h_0 das Kantenstück CO bezeichnet

In analoger Weise lässt sich der entsprechende Ausdruck für das Integral S_2 gewinnen. Nehmen wir an, die Coordinaten des beliebigen Elements $d\omega_2$ der Wellenfläche ACE_2F_2 sind $x_2 y_2 z_2$ (die y -Axe soll in diesem Falle die Richtung $L^* \rightarrow L_2$ haben), und machen wir dieselben Voraussetzungen bezüglich der Grössen $x_2, y_2, d\omega_2$ und ϱ_2 , die wir soeben in Betreff der Grössen $x_1, y_1, d\omega_1$ und ϱ_1 gemacht haben, so erhalten wir:

$$S_2 = \frac{A}{\lambda(z-a)} \int_{x_2=-h_0}^{x_2=h-h_0} \int_{y_2=0}^{y_2=b} \cos \left\{ 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} - \frac{r_2}{\lambda} - \frac{z}{2a(z-a)\lambda} \left(x_2 - \frac{xa}{z} \right)^2 - \frac{z}{2a(z-a)\lambda} \left(y_2 - \frac{-ya + \delta(z-a)}{z} \right)^2 \right] \right\} . dx_2 dy_2.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommende Länge r_2 stellt die Strecke $L_2 Q$ vor. Um kürzere Formen für S_1 und S_2 zu erzielen, soll gesetzt werden:

$$\begin{array}{l|l|l|l} z = a + w & \frac{x}{a+w} = \alpha & \frac{\delta w + ay}{a+w} = \beta_1 & y_1 - \beta_1 = v_1 \\ \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+w}{a \cdot w} = m & \frac{x_1 - \alpha}{x_2 - \alpha} = \frac{u_1}{u_2} & \frac{\delta w - ay}{a+w} = \beta_2 & y_2 - \beta_2 = v_2 \end{array}$$

Nach Einführung dieser neuen Bezeichnung nimmt die Summe der beiden Flächenintegrale folgende Form an:

$$S = \frac{A}{\lambda w} \int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) - 2\pi \frac{r_1}{\lambda} - mu_1^2 - mv_1^2 \right] . du_1 dv_1 \\ + \frac{A}{\lambda w} \int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) - 2\pi \frac{r_2}{\lambda} - mu_2^2 - mv_2^2 \right] . du_2 dv_2,$$

oder:

$$S = \left\{ \frac{A}{\lambda w} \int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos \left[2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right] . du_1 dv_1 \right. \\ \left. + \frac{A}{\lambda w} \int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \cos \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) . du_2 dv_2 \right\} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) \\ + \left\{ \frac{A}{\lambda w} \int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \sin \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right) . du_1 dv_1 \right. \\ \left. + \frac{A}{\lambda w} \int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \sin \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) . du_2 dv_2 \right\} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right).$$

Hieraus lässt sich sofort die in dem Orte Q auftretende Lichtstärke ableiten. Bringt man den Satz in Anwendung:

$$P \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) + Q \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) \\ = \sqrt{P^2 + Q^2} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) - \arctg \frac{Q}{P} \right]$$

und berücksichtigt, dass die Lichtstärke H in einem Orte gleichzusetzen ist dem Mittelwerthe, welchen die lebendige Kraft der in diesem Orte stattfindenden Aetherschwingung während der Dauer einer Schwingung besitzt, dass also:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\mu}{T} \int_0^T \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 . dt,$$

wo μ die Masse des oscillirenden Aethertheilchens und S die zur Zeit t vorhandene Ausbiegung aus der Gleichgewichtslage bedeutet, so findet man als Ausdruck der in Q unter dem Zusammenwirken der von beiden Wellenflächen ausgehenden Oscillationen auftretenden Lichtintensität H folgende Form:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} H = & \mu \frac{\pi^2 A^2}{T^2 \lambda^2 v^2} \left[\int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right) du_1 dv_1 \right. \\ & + \left. \int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \cos \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) du_2 dv_2 \right]^2 \\ & + \mu \frac{\pi^2 A^2}{T^2 \lambda^2 v^2} \left[\int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \sin \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right) du_1 dv_1 \right. \\ & + \left. \int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \sin \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) du_2 dv_2 \right]^2. \end{aligned} \right.$$

Die hier auftretenden Doppelintegrale können auf Producte einfacher Integrale zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} & \int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right) du_1 dv_1 = \\ & \int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \frac{\cos}{\sin} \left(mu_1^2 \right) du_1 \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mv_1^2 \right) dv_1 \\ & \mp \int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \frac{\sin}{\cos} \left(mu_1^2 \right) du_1 \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \sin \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mv_1^2 \right) dv_1 \end{aligned}$$

und:

$$\int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \frac{\cos}{\sin} \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) du_2 dv_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{u_2=-h_0-a}^{u_2=h-h_0-a} \frac{\cos}{\sin} \left(m u_2^2 \right) du_2 \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \cos \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + m v_2^2 \right) dv_2 \\
&\mp \int_{u_2=-h_0-a}^{u_2=h-h_0-a} \frac{\sin}{\cos} \left(m u_2^2 \right) du_2 \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \sin \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + m v_2^2 \right) dv_2.
\end{aligned}$$

Somit ist die Bestimmung der in Q resultirenden Helligkeit auf die Auswerthung Fresnel'scher Integrale reducirt. In dem folgenden Abschnitte führe ich die Fresnel'schen Integrale auf die verallgemeinerte Bessel'sche Function und auf eine mit letzterer auf das engste zusammenhängende Function zurück und decke damit die eigentliche Natur dieser Integrale auf.

2. Die ursprüngliche, von Bessel eingeführte Definition der Bessel'schen Function ist:

$$2\pi I_{(k)}^h = \int_0^{2\pi} \cos(h\varphi - k \cos \varphi) d\varphi,$$

wo der Index h eine ganze Zahl vorstellt. Bessel stellte die Function I durch folgende, nach aufsteigenden Potenzen des Arguments k fortschreitende convergente Reihe dar:

$$I_{(k)}^h = \frac{k^h}{2 \cdot 4 \dots 2h} \left(1 - \frac{k^2}{2(2h+2)} + \frac{k^4}{2 \cdot 4(2h+2)(2h+4)} - \dots \right)$$

entwickelte die drei Fundamentalgleichungen:

$$\begin{aligned}
I_{(k)}^{h+1} &= \frac{2h}{k} I_{(k)}^h - I_{(k)}^{h-1} & \frac{dI_{(k)}^h}{dk} &= \frac{1}{2} \left(I_{(k)}^{h-1} - I_{(k)}^{h+1} \right) \\
I_{(k)}^{h+1} &= \frac{h}{k} I_{(k)}^h - \frac{dI_{(k)}^h}{dk}
\end{aligned}$$

und zeigte, dass die Function die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d^2 I_{(k)}^h}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{dI_{(k)}^h}{dk} + \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) I_{(k)}^h = 0.$$

Später hat dann Jacobi einen weitern allgemeinen Ausdruck der Function, I in Form einer semiconvergenten

Reihe gegeben, welcher für sehr grosse Werthe des Arguments k die Natur der Transcendente vor Augen legt und zur numerischen Berechnung derselben von ausserordentlicher Brauchbarkeit ist:

$$(-1)^{\frac{h}{2}(h-1)} I_{(k)}^h = \frac{\sin \left[k + (-1)^h \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2} k}} \left\{ 1 - \frac{(1-4h^2)(3^2-4h^2)}{H2 \cdot (8k)^2} \right. \\ \left. + \frac{(1^2-4h^2)(3^2-4h^2)(5^2-4h^2)(7^2-4h^2)}{H4 \cdot (8k)^4} - \dots \right\} \\ - \frac{\cos \left[k + (-1)^h \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2} k}} \left\{ \frac{1^2-4h^2}{H1 \cdot (8k)^1} - \frac{(1^2-4h^2)(3^2-4h^2)(5^2-4h^2)}{H3 \cdot (8k)^3} + \dots \right\}.$$

Diese semiconvergenten Reihen haben die Eigenschaft, dass jedes neu hinzukommende Glied das Maximum des Unterschiedes zwischen dem Functionswerthe und der Summe der angewandten Glieder bezeichnet.

Ich verallgemeinere die Definition der Bessel'schen Function dadurch, dass ich setze:

$$I_{(k)}^h = \int_0^{\pi} \cos(h\varphi - k \sin \varphi) d\varphi,$$

wo der Index h eine ganz beliebige Zahl sein soll, und führe als verwandte Transcendente die Function:

$$E_{(k)}^h = \int_0^{\pi} \sin(h\varphi - k \sin \varphi) d\varphi$$

ein. Die beiden Functionen lassen sich zunächst durch folgende, nach aufsteigenden Potenzen des Arguments fortschreitende, convergente Reihen darstellen:

$$I_{(k)}^h = \frac{\sin h\pi}{h} \left\{ 1 + \frac{k^2}{h^2-2^2} + \frac{k^4}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)} + \dots \right\} \\ - \sin h\pi \left\{ \frac{k^1}{h^2-1^2} + \frac{k^3}{(h^2-1^2)(h^2-3^2)} + \frac{k^5}{(h^2-1^2)(h^2-3^2)(h^2-5^2)} + \dots \right\}.$$

27*

$$E_{(k)}^h = \frac{1 - \cos h\pi}{h} \left\{ 1 + \frac{k^2}{(h^2 - 2^2)} + \frac{k^4}{(h^2 - 2^2)(h^2 - 4^2)} + \dots \right\} \\ + (1 + \cos h\pi) \left\{ \frac{k^1}{(h^2 - 1^2)} + \frac{k^3}{(h^2 - 1^2)(h^2 - 3^2)} + \frac{k^5}{(h^2 - 1^2)(h^2 - 3^2)(h^2 - 5^2)} + \dots \right\}.$$

Aus diesen Ausdrucksformen der beiden Functionen lassen sich leicht folgende vier Eigenschaften derselben deduciren:

$$(2a) \quad I_{(k)}^{h+1} = \frac{2h}{k} I_{(k)}^h - I_{(k)}^{h-1} - \frac{\sin h\pi}{k}$$

und:

$$(2b) \quad E_{(k)}^{h+1} = \frac{2h}{k} E_{(k)}^h - E_{(k)}^{h-1} - \frac{2(1 - \cos h\pi)}{k}.$$

$$\frac{dI_{(k)}^h}{dk} = \frac{1}{2} (I_{(k)}^{h-1} - I_{(k)}^{h+1}) \dots \dots \text{ und } \frac{dE_{(k)}^h}{dk} = \frac{1}{2} (E_{(k)}^{h-1} - E_{(k)}^{h+1})$$

$$(3a) \quad I_{(k)}^{h+1} = \frac{h}{k} I_{(k)}^h - \frac{dI_{(k)}^h}{dk} - \frac{\sin h\pi}{k}$$

und:

$$(3b) \quad E_{(k)}^{h+1} = \frac{h}{k} E_{(k)}^h - \frac{dE_{(k)}^h}{dk} - \frac{1 - \cos h\pi}{k}.$$

$$\frac{d^2 I_{(k)}^h}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{dI_{(k)}^h}{dk} + \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) I_{(k)}^h - \frac{\sin h\pi}{k} + \frac{h}{k^2} \sin h\pi = 0$$

und:

$$\frac{d^2 E_{(k)}^h}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{dE_{(k)}^h}{dk} + \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) E_{(k)}^h + \frac{1 + \cos h\pi}{k} + \frac{h(1 + \cos h\pi)}{k^2} = 0.$$

Zwischen den beiden Transcendenten bestehen folgende Zusammenhänge:

$$(4) \quad I_{(k)}^h \cdot \sin h\pi = E_{(k)}^h \cdot \cos h\pi - E_{(k)}^{-h}.$$

$$(5) \quad E_{(k)}^h \cdot \sin h\pi = -I_{(k)}^h \cdot \cos h\pi + I_{(k)}^{-h}.$$

Zur Darstellung der beiden Functionen für grosse Argumentwerthe und zur deutlichen Einsicht in die Natur der beiden Transcendenten können folgende semiconvergente Reihen dienen:

$$\begin{aligned}
 I_{(k)}^h = & -\frac{\sin h\pi}{h} \left(\frac{h^2}{k^2} + \frac{h^2(h^2-2^2)}{k^4} + \frac{h^2(h^2-2^2)(h^2-4^2)}{k^6} + \dots \right) \\
 & + \sin h\pi \left(\frac{1}{k} + \frac{h^2-1^2}{k^3} + \frac{(h^2-1^2)(h^2-3^2)}{k^5} + \dots \right) \\
 & + \cos \left[k - (2h+1) \frac{\pi}{4} \right] \left(1 - \frac{(4h^2-1^2)(4h^2-3^2)}{II 2 \cdot (8k)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(4h^2-1^2)(4h^2-3^2)(4h^2-5^2)(4h^2-7^2)}{II 4 \cdot (8k)^4} - \dots \right) \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \\
 & - \sin \left[k - (2h+1) \frac{\pi}{4} \right] \left(\frac{4h^2-1^2}{II 1 \cdot 8k} - \frac{(4h^2-1^2)(4h^2-3^2)(4h^2-5^2)}{II 3 \cdot (8k)^3} + \dots \right) \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \\
 E_{(k)}^h = & -\frac{(1-\cos h\pi)}{h} \left(\frac{h^2}{k^2} + \frac{h^2(h^2-2^2)}{k^4} + \frac{h^2(h^2-2^2)(h^2-4^2)}{k^6} + \dots \right) \\
 & - (1+\cos h\pi) \left(\frac{1}{k} + \frac{h^2-1^2}{k^3} + \frac{(h^2-1^2)(h^2-3^2)}{k^5} + \dots \right) \\
 & - \sin \left[k - (2h+1) \frac{\pi}{4} \right] \left(1 - \frac{(4h^2-1^2)(4h^2-3^2)}{II 2 \cdot (8k)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(4h^2-1^2)(4h^2-3^2)(4h^2-5^2)(4h^2-7^2)}{II 4 \cdot (8k)^4} - \dots \right) \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \\
 & - \cos \left[k - (2h+1) \frac{\pi}{4} \right] \left(\frac{4h^2-1^2}{II 1 \cdot 8k} - \frac{(4h^2-1^2)(4h^2-3^2)(4h^2-5^2)}{II 3 \cdot (8k)^3} + \dots \right) \sqrt{\frac{2\pi}{k}}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Diese Reihen haben die Eigenschaft, dass die Summe aller dem n ten Gliede folgenden Glieder kleiner ist als das n te Glied. Die beiden ersten der vier Reihen stehen übrigens in einem engen Zusammenhange mit den von C. Neumann eingeführten Bessel'schen Functionen zweiter Art. In dem speciellen Falle, dass der Index h der Functionen den Werth $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$ annimmt, vereinfachen sich die obigen Ausdrücke erheblich, weil dann die dritte und vierte Reihe von selbst abbrechen und nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthalten; für den Fall $h = \frac{1}{2}$ z. B. findet sich:

$$\begin{aligned}
 I_{(k)}^{\frac{1}{2}} = & \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sin k + 2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{1 \cdot 3}{(2k)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2k)^5} - \dots \right) \\
 & - 2 \left(\frac{1}{(2k)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2k)^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2k)^6} - \dots \right).
 \end{aligned}$$

$$E_{(k)}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cos k - 2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{1 \cdot 3}{(2k)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2k)^5} - \dots \right) \\ - 2 \left(\frac{1}{(2k)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2k)^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2k)^6} - \dots \right).$$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Fresnel'schen Integrale durch die Functionen $I^{\frac{1}{2}}$ und $E^{\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden können. Setzen wir in den Relationen (3a) und (3b) $h = \frac{1}{2}$ und $k = mu^2$, so gehen dieselben über in:

$$I_{(mu^2)}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2mu^2} I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2mu} \cdot \frac{dI_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}}}{du} - \frac{1}{mu^2},$$

$$E_{(mu^2)}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2mu^2} E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2mu} \cdot \frac{dE_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}}}{du} - \frac{1}{mu^2}.$$

Aus den Beziehungen (2a) und (2b) nebst (4) und (5) lässt sich aber für diesen speciellen Fall $h = \frac{1}{2}$ und $k = mu^2$ ableiten:

$$I_{(mu^2)}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{mu^2} I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{mu^2},$$

$$E_{(mu^2)}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{mu^2} E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{mu^2}.$$

Aus diesen vier Beziehungen ergeben sich die beiden folgenden:

$$I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - 2mu^2 E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + u \frac{dI_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}}}{du} - 2 = 0.$$

$$E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + 2mu^2 I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + u \frac{dE_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}}}{du} - 2 = 0.$$

oder auch:

$$(7) \quad \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) + u \frac{d}{du} \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) + 2mu^2 \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) = 4.$$

$$(8) \quad \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) + u \frac{d}{du} \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) - 2mu^2 \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Multipliciren wir die Gleichung (7) mit $\cos mu^2$, die Gleichung (8) mit $\sin mu^2$ und addiren wir die erhaltenen Producte, so erhalten wir:

$$4 \cos mu^2 = \frac{d}{du} \left\{ \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \cos mu^2 \right. \\ \left. + \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \sin mu^2 \right\}.$$

Wird dagegen die Gleichung (7) mit $\sin mu^2$, die Gleichung (8) mit $-\cos mu^2$ multiplicirt, so liefert die Addition der entstandenen Producte die Gleichung:

$$4 \sin mu^2 = \frac{d}{du} \left\{ \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \sin mu^2 \right. \\ \left. - \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \cos mu^2 \right\}.$$

Die beiden allgemeinen Fresnel'schen Integrale haben demnach folgende Werthe:

$$\int \cos(mu^2) \cdot du = \frac{1}{4} \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \cos mu^2 \\ + \frac{1}{4} \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \sin mu^2 + C. \\ \int \sin(mu^2) \cdot du = \frac{1}{4} \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \sin mu^2 \\ - \frac{1}{4} \left(I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cdot u \cdot \cos mu^2 + C.$$

Die Constante C hat den Werth Null, sobald die untere Grenze der beiden Integrale Null ist.

Führen wir die oben erhaltenen semiconvergenten Reihen für $I^{\frac{1}{2}}$ und $E^{\frac{1}{2}}$ in die soeben erhaltenen Resultate ein, so können wir sofort die Grenzwerte angeben, welchen die beiden Fresnel'schen Integrale bei wachsendem Argumente zustreben. Es ist:

$$\frac{u}{4} I_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{4} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{mu^2}} \sin mu^2 + 2 \left(\frac{1}{2mu^2} - \frac{1 \cdot 3}{(2mu^2)^3} + \dots \right) \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{1}{(2mu^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2mu^2)^4} + \dots \right) \right\}, \\ \frac{u}{4} \cdot E_{(mu^2)}^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{4} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{mu^2}} \cos mu^2 - 2 \left(\frac{1}{2mu^2} - \frac{1 \cdot 3}{(2mu^2)^3} + \dots \right) \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{1}{(2mu^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2mu^2)^4} + \dots \right) \right\}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^u \cos(mu^2) du &= u \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2mu^2}} + \left(\frac{1}{2mu^2} - \frac{1.3}{(2mu^2)^3} + \dots \right) \sin mu^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{(2mu^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2mu^2)^4} + \dots \right) \cos mu^2 \right\}, \\ \int_0^u \sin(mu^2) du &= u \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2mu^2}} - \left(\frac{1}{2mu^2} - \frac{1.3}{(2mu^2)^3} + \dots \right) \cos mu^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{(2mu^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2mu^2)^4} + \dots \right) \sin mu^2 \right\}. \end{aligned}$$

Daraus geht hervor: haben die obere Grenze u und die Constante m der Fresnel'schen Integrale so grosse Werthe, dass schon $\frac{2}{\sqrt{2\pi mu^2}}$ verschwindend klein gegenüber eins wird, so ist:

$$\int_0^u \cos(mu^2) \cdot du = \int_0^u \sin(mu^2) du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}}.$$

3. Nach dieser Zurückführung der Fresnel'schen Integrale auf die Functionen $I^{\frac{1}{2}}$ und $E^{\frac{1}{2}}$ gehen wir wieder zu dem früher gefundenen unentwickelten Ausdrucke (1) für die Lichtstärke H im Orte Q zurück und ersetzen zunächst die Grösse $\frac{\mu \cdot \pi^2 \cdot A^2}{T^2 \cdot \lambda^2 \cdot w^2}$ durch $\frac{H_0}{\lambda^2 \cdot w^2}$, wo H_0 die in den beiden Wellenflächen ACE_1F_1 und ACE_2F_2 vorhandene Lichtstärke bezeichnet. Es ist:

$$\begin{aligned} H &= H_0 \frac{1}{\lambda^2 w^2} \left[\int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right) du_1 dv_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{u_2=h-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \cos \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) du_2 dv_2 \right]^2 \\ &+ H_0 \frac{1}{\lambda^2 w^2} \left[\int_{u_1=-h_0-\alpha}^{u_1=h-h_0-\alpha} \int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \sin \left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mu_1^2 + mv_1^2 \right) du_1 dv_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{u_2=-h_0-\alpha}^{u_2=h-h_0-\alpha} \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \sin \left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mu_2^2 + mv_2^2 \right) du_2 dv_2 \right]^2. \end{aligned}$$

Diese Summe zweier Quadrate lässt sich zunächst in ein Product aus zwei Factoren zerlegen, von denen jeder die Summe zweier Quadrate ist, und von denen der eine nur die Variable u , der andere nur die Variablen v_1 und v_2 enthält.

$$H = H_0 \frac{1}{\lambda^2 a^2} \left\{ \left[\int_{u_1 = -h_0 - a}^{u_1 = h - h_0 - a} \cos(mu_1^2) du_1 \right]^2 + \left[\int_{u_1 = -h_0 - a}^{u_1 = h - h_0 - a} \sin(mu_1^2) du_1 \right]^2 \right\} \\ \times \left\{ \left[\int_{v_1 = -\beta_1}^{v_1 = b - \beta_1} \cos\left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mv_1^2\right) dv_1 + \int_{v_2 = -\beta_2}^{v_2 = b - \beta_2} \cos\left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mv_2^2\right) dv_2 \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\int_{v_1 = -\beta_1}^{v_1 = b - \beta_1} \sin\left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mv_1^2\right) dv_1 + \int_{v_2 = -\beta_2}^{v_2 = b - \beta_2} \sin\left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mv_2^2\right) dv_2 \right]^2 \right\}.$$

Der erste eingeklammerte Factor steht in keinem Zusammenhange mit dem durch das Zusammenwirken der beiden Wellensysteme hervorgerufenen Interferenzphänomen; wir wollen denselben aus diesem Grunde nicht näher betrachten, sondern nur so viel hervorheben, dass der Grenzwert, welchem derselbe bei wachsenden Grenzen $u_1 = h - (h_0 + a)$ und $u_1 = h_0 + a$ zustrebt, $\frac{\pi}{m}$ ist. Dieser Factor möge daher von jetzt an kurz mit $\frac{\pi}{m} X^2$ bezeichnet werden, wo die Grösse X^2 eine (aus den letzten Formeln des vorigen Abschnittes leicht ableitbare) Function von $m(h - h_0 - a)^2$ und $m(h_0 + a)^2$ bedeutet, die sich bei wachsenden Werthen dieser Grössen der Einheit nähert.

Der Behandlung des zweiten eingeklammerten Factors möge die beschränkende Voraussetzung zu Grunde gelegt werden, dass die in den oberen Grenzen der Integrale auftretende Grösse h (die Breite der Wellenflächen) so gross sei, und dass die in den oberen und unteren Grenzen vorkommenden Strecken β_1 und β_2 (die Entfernungen der Durchstosspunkte P_1 und P_2 von der Kante AC) sich innerhalb solcher Grenzen halten, dass die Grössen:

$$\pi(b - \beta_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)} \quad \text{und} \quad \pi(b - \beta_2) \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}$$

verschwindend klein gegenüber der Einheit sind. Da der reciproke Werth der Wellenlänge im Nenner dieser Grössen erscheint, wird diese Voraussetzung schon bei einer mässigen Breite b der die Interferenz erzeugenden Wellenflächen erfüllt sein. (Ist z. B. $b = 20$ mm, $\beta_1 = \beta_2 = 2$ mm, $\lambda = 0,0006$ mm und $a = w = 1000$ mm, so ist jede der beiden angegebenen Grössen von der Ordnung 0,01.) Unter dieser Voraussetzung ist dann:

$$\int_0^{b-\beta_1} \cos(mv_1^2) dv_1 = \int_0^{b-\beta_2} \cos(mv_2^2) dv_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}}$$

und die Quadratensumme:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \cos\left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mv_1^2\right) dv_1 + \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \cos\left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mv_2^2\right) dv_2 \right]^2 \\ & + \left[\int_{v_1=-\beta_1}^{v_1=b-\beta_1} \sin\left(2\pi \frac{r_1}{\lambda} + mv_1^2\right) dv_1 + \int_{v_2=-\beta_2}^{v_2=b-\beta_2} \sin\left(2\pi \frac{r_2}{\lambda} + mv_2^2\right) dv_2 \right]^2 \end{aligned}$$

geht über in:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \cos\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_1 \cos \frac{2\pi r_1}{\lambda} \cos m\beta_1^2 + B_1 \cos \frac{2\pi r_1}{\lambda} \sin m\beta_1^2 \right]^2 \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sin\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) - A_1 \sin \frac{2\pi r_1}{\lambda} \sin m\beta_1^2 + B_1 \sin \frac{2\pi r_1}{\lambda} \cos m\beta_1^2 \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \cos\left(\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) + A_2 \cos \frac{2\pi r_2}{\lambda} \cos m\beta_2^2 + B_2 \cos \frac{2\pi r_2}{\lambda} \sin m\beta_2^2 \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sin\left(\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) - A_2 \sin \frac{2\pi r_2}{\lambda} \sin m\beta_2^2 + B_2 \sin \frac{2\pi r_2}{\lambda} \cos m\beta_2^2 \Big] \\ & + \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sin\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_1 \sin \frac{2\pi r_1}{\lambda} \cos m\beta_1^2 + B_1 \sin \frac{2\pi r_1}{\lambda} \sin m\beta_1^2 \right]^2 \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \cos\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_1 \cos \frac{2\pi r_1}{\lambda} \sin m\beta_1^2 - B_1 \cos \frac{2\pi r_1}{\lambda} \cos m\beta_1^2 \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sin\left(\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) + A_2 \sin \frac{2\pi r_2}{\lambda} \cos m\beta_2^2 + B_2 \sin \frac{2\pi r_2}{\lambda} \sin m\beta_2^2 \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \cos\left(\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) + A_2 \cos \frac{2\pi r_2}{\lambda} \sin m\beta_2^2 - B_2 \sin \frac{2\pi r_2}{\lambda} \cos m\beta_2^2 \Big] \end{aligned}$$

wo Kürze halber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\beta_1}{4} \left\{ I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} + E_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} \right\} & B_1 &= \frac{\beta_1}{4} \left\{ I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} - E_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} \right\} \\ A_2 &= \frac{\beta_2}{4} \left\{ I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} + E_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} \right\} & B_2 &= \frac{\beta_2}{4} \left\{ I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} - E_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

gesetzt worden ist. Der Umstand, dass die Summe $\frac{2\pi r_1}{\lambda} + m\beta_1^2$ gleich der Summe $\frac{2\pi r_2}{\lambda} + m\beta_2^2$ ist, sobald die Grössen $\left(\frac{x}{z}\right)^2$ und $\left(\frac{y}{z}\right)^2$ verschwindend klein gegen die Einheit sind (was in allen Fresnel'schen Interferenzapparaten immer realisirt sein wird, da x und y nur die Längen Null bis einige Millimeter besitzen, z dagegen mehrere Meter lang ist), vereinfacht diese Ausdrücke ganz erheblich. Nach mancherlei Umgestaltungen lässt sich die Summe der beiden zuletzt angeschriebenen Quadrate in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{m} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} (A_1 + A_2) \cos \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \sin \left[m\beta_1^2 - \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + \frac{\pi}{4} \right] \\ & - 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} (B_1 + B_2) \cos \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \cos \left[m\beta_1^2 - \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + \frac{\pi}{4} \right] \\ & + (A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2 \end{aligned}$$

oder, da nach einer soeben gemachten Bemerkung $\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = m\beta_1^2 = m\beta_2^2$ ist,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{m} \cos^2 \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) + 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} (A_1 + A_2) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & - 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} (B_1 + B_2) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & + (A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2. \end{aligned}$$

Nach der Einführung der oben angegebenen Werthe für A_1 , A_2 , B_1 und B_2 verwandelt sich diese Form in die folgende:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{m} \cos^2 \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) &+ 2 \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \left(\frac{\beta_1}{4} I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta_2}{4} I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} \right) \\ &+ 2 \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \left(\frac{\beta_1}{4} E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta_2}{4} E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{\beta_1}{4} I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta_2}{4} I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\beta_1}{4} E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta_2}{4} E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Dieses ist aber die Summe zweier Quadrate:

$$\begin{aligned} &\left[\sqrt{\frac{\pi}{m}} \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\beta_1}{4} I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta_2}{4} I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \\ &+ \left[\sqrt{\frac{\pi}{m}} \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\beta_1}{4} E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta_2}{4} E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

Nachdem an dieser Quadratensumme zwei leicht zu übersehende Umformungen vorgenommen worden sind, resultirt als Ausdruck der Lichtintensität im Orte Q der folgende Werth:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= H_0 \frac{1}{\lambda^2 w^2} \frac{\pi^2}{4 m^2} X^2 \left\{ \left[\sin m\beta_1^2 + \sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left(\beta_1 I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos m\beta_1^2 + \cos m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left(\beta_1 E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

In diesem Ausdrucke kann die Grösse $H_0 \left(\frac{\pi}{2\lambda w m} \right)^2$ wegen $m = \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+v}{a \cdot w}$ durch den einfachern Werth $H_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{a+v} \right)^2$ ersetzt werden.

An diesem Endresultate möge zunächst erläutert werden, in welchem Grade die von Fresnel gegebene Theorie seiner Interferenzapparate fehlerhaft ist. Drücken wir die Functionen $I^{\frac{1}{2}}$ und $E^{\frac{1}{2}}$ durch semiconvergente Reihen aus, so erhalten wir (für positive β_1 und β_2):

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left(\beta_1 I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) = \sin m\beta_1^2 + \sin m\beta_2^2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_1^2}} - \frac{1.3}{\sqrt{2m\beta_1^2}} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_1^2}} - \frac{1.3.5}{\sqrt{2m\beta_1^2}} + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_2^2}} - \frac{1.3}{\sqrt{2m\beta_2^2}} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_2^2}} - \frac{1.3.5}{\sqrt{2m\beta_2^2}} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left(\beta_1 E_{\frac{1}{2}(m\beta_1^2)} + \beta_2 E_{\frac{1}{2}(m\beta_2^2)} \right) = \cos m\beta_1^2 + \cos m\beta_2^2 \\ & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_1^2}} - \frac{1.3}{\sqrt{2m\beta_1^2}} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_1^2}} - \frac{1.3.5}{\sqrt{2m\beta_1^2}} + \dots \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_2^2}} - \frac{1.3}{\sqrt{2m\beta_2^2}} + \dots \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_2^2}} - \frac{1.3.5}{\sqrt{2m\beta_2^2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Gesetzt, es wäre sowohl $m\beta_1^2$ als auch $m\beta_2^2$ so gross, dass schon die Werthe $\frac{1}{\sqrt{2\pi m\beta_1^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi m\beta_2^2}}$ verschwindend klein ausfallen, so würde sich der Ausdruck der Lichtintensität in den einfachern Werth verwandeln:

$$\begin{aligned} H &= H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X^2 \cdot 4 \cos^2 \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \\ &= H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X^2 \cdot 4 \cos^2 \left\{ \frac{\pi(a+w)}{2\lambda \cdot a \cdot w} \left[\left(\frac{a\delta + wy}{a+w} \right)^2 - \left(\frac{a\delta - wy}{a+w} \right)^2 \right] \right\} \\ &= H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X^2 \cdot 4 \cos^2 \left(\frac{2\pi\delta y}{\delta(a+w)} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber, von dem für die Interferenzerscheinung unwesentlichen Factor $\left(\frac{a}{a+w} \cdot X \right)^2$ abgesehen, identisch mit dem von Fresnel gegebenen. Die von Fresnel entwickelte Theorie würde also nur dann mit den von ihm aufgestellten Grundsätzen der Diffractionstheorie, d. h. mit dem Huygens'schen Princip harmoniren, wenn die Grössen $\frac{1}{\sqrt{2\pi m\beta_1^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi m\beta_2^2}}$ verschwindend klein wären. Diese Grössen haben aber in allen Fällen ganz erhebliche Werthe. Lassen wir z. B. den Ort Q mitten in dem Interferenzfelde liegen, also $y = 0$ sein, so wird

$$\beta_1 = \beta_2, \text{ und die Grösse } \frac{1}{\sqrt{2\pi m\beta}} \text{ wird gleich } \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{\pi \frac{\delta}{a}}$$

oder gleich $\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{\pi \operatorname{tg} i}$, wenn der Winkel $L_1 O L_2$ mit $< i$

bezeichnet wird; nehmen wir $a=w=1000$ mm, $\lambda=0,00064$ $< i = 20'$ (Verhältnisse, wie sie wohl meistens bei Fresnel'schen Interferenzapparaten vorkommen werden), so erhält

$\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{\pi \operatorname{tg} i}$ den Werth $\frac{1}{12}$. Durch Vergrößerung von a und w lässt sich die Grösse dieses Werthes nur sehr unerheblich herabdrücken; sollte derselbe durch Vergrößerung von a und w z. B. bei demselben i auf 0,01 herabgesetzt werden, so wäre $a=w=70$ m zu nehmen. Viel leichter liesse sich dieser Zweck durch Vergrößerung des Winkels i erreichen; nur würde man mit der Vergrößerung dieses Winkels nicht über eine gewisse Grenze hinausgehen dürfen, wenn die Interferenzfransen in mässiger Entfernung vom Interferenzapparate noch eine genügende Breite behalten sollen.

Wären nun aber auch in dieser Weise für die Orte in unmittelbarer Nähe der xz -Ebene die Grössen

$\frac{1}{\pi \beta_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}$ und $\frac{1}{\pi \beta_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}$ so weit verkleinert worden, dass für diese Orte die Functionen $\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot I_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot E_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}}$ gleich den Grössen $\sin(m\beta^2)$ und $\cos(m\beta^2)$ gesetzt werden dürften, so wäre dieses doch nicht mehr gestattet für Orte, die erheblich seitwärts von der xz -Ebene liegen, wie die Zusammenhänge:

$$\beta_1 = \frac{\delta w + ya}{w + a} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{\delta w - ya}{w + a}$$

sofort erkennen lassen.

Der erlangte allgemeine Ausdruck für die in Q auftretende Lichtintensität lässt ohne weiteres erkennen, dass für die Orte, für welche y erheblich $> \pm \frac{w}{a} \delta$ ist, d. h. für Orte, die ausserhalb des keilförmigen Raumes liegen, der durch die Ebenen $L_1 AC$ und $L_2 AC$ aus dem allgemeinen Raume ausgeschnitten wird, die Lichtstärke H einen

constanten Werth besitzt. Ist nämlich y bedeutend grösser als $+\frac{v}{a}\delta$, so wird $\beta_1 = \frac{ya + \delta v}{a + v}$ so gross, dass

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} = \sin m\beta_1^2 \text{ und } \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} = \cos m\beta_1^2$$

gesetzt werden darf; der Werth $\beta_2 = \frac{-ya + \delta v}{a + v}$ nimmt

dagegen einen erheblichen negativen Werth an, so-

dass $\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}}$ angenähert gleich $-\sin m\beta_2^2$ und

$\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}}$ angenähert gleich $-\cos m\beta_2^2$ ist. Der

hieraus resultierende Werth der Lichtstärke ist daher

$$H = H_0 \left(\frac{a}{a + v} \right)^2 X^2. \text{ Aus der Form des allgemeinen Aus-}$$

druckes (9) der Lichtintensität kann also sofort ersehen werden, dass die Lichtintensität der Hauptsache nach

nur innerhalb der räumlichen Grenzen $y = +\frac{v}{a}\delta$ und

$y = -\frac{v}{a}\delta$ eine oscillirende sein kann. Schon aus dem

Umstande, dass dieses Factum in Fresnel's Helligkeitsausdruck nicht enthalten ist, kann a priori geschlossen werden, dass die von Fresnel zur Herleitung dieses Ausdruckes angestellten Betrachtungen falsch sein müssen.

Bei der Ableitung des allgemeinen Intensitätsausdruckes (9) sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dass eine punktförmige Lichtquelle L das Doppelprisma oder den Doppelspiegel beleuchtet. Das erlangte Resultat kann jetzt dazu benutzt werden, den allgemeinen Helligkeitsausdruck für den Fall herzuleiten, dass eine durch L gehende und zur Kante AC parallel stehende Lichtlinie das Doppelprisma bestrahlt. Zu diesem Zwecke ist der allgemeine Ausdruck (9) eine Integration bezüglich der Richtung der x innerhalb gewisser Grenzen zu unterziehen. Der durch diese Operation hervorgehende Ausdruck der Helligkeit hat dieselbe Form wie der obige; an die Stelle der Function X^2 tritt nur eine andere, etwa X_1^2 .

4. Nachdem der allgemeine Ausdruck der Lichtintensität:

$$H = H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} X_1^2 \left\{ \left[\sin m\beta_1^2 + \sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left(\beta_1 \cdot I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\cos m\beta_1^2 + \cos m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \left(\beta_1 \cdot E_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \right\}$$

gefunden worden ist, soll jetzt die Vertheilung der Lichtintensität über die verschiedenen y etwas genauer betrachtet werden. Zu diesem Zwecke sind zunächst der erste und der zweite Differentialquotient von H nach y zu bilden. Diese Differentialquotienten lassen sich unter Anwendung der folgenden Formeln leicht angeben; es ist zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (\sin m\beta_1^2) &= + 2m\beta_1 \frac{a}{a+w} \cos(m\beta_1^2) \\ \frac{d}{dy} (\sin m\beta_2^2) &= - 2m\beta_2 \frac{a}{a+w} \cos(m\beta_2^2) \\ \frac{d}{dy} (\cos m\beta_1^2) &= - 2m\beta_1 \frac{a}{a+w} (\sin m\beta_1^2) \\ \frac{d}{dy} (\cos m\beta_2^2) &= + 2m\beta_2 \frac{a}{a+w} \sin(m\beta_2^2); \end{aligned}$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy} \left(\beta_1 \cdot I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{a}{a+w} \left(I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} + 2m\beta_1 \cdot \frac{d I_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}}}{d\beta_1} - I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} - 2\beta_2^2 \frac{d I_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}}}{d\beta_2} \right). \end{aligned}$$

Durch Anwendung der im Abschnitte (2) gegebenen Relation:

$$I_{(m\beta)}^{\frac{1}{2}} + 2m\beta^2 \frac{d I_{(m\beta)}^{\frac{1}{2}}}{d\beta} = 2 + 2m\beta^2 \cdot E_{(m\beta)}^{\frac{1}{2}}$$

verwandelt sich die rechte Seite der letzten Gleichung in den einfachern Werth:

$$\frac{a}{a+w} \left(2m\beta_1^2 \cdot E_{(m\beta_1)}^{\frac{1}{2}} - 2m\beta_2^2 \cdot E_{(m\beta_2)}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Unter Benutzung der ebenfalls früher im Abschnitte (2) gegebenen Beziehung:

$$E_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}} + 2m\beta^2 \cdot \frac{dE_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}}}{d\beta} = 2 - 2m\beta^2 I_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}}$$

lässt sich die der letztgefundenen analoge Relation gewinnen:

$$\frac{d}{dy} \left(\beta_1 \cdot E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{a}{a+w} \left(-2m\beta_1^2 I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} + 2m\beta_2^2 I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Mit Benutzung dieser Formeln findet man als Endresultat:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dy} &= H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^3 \cdot m(\beta_1 + \beta_2) \cdot X_1^2 \\ &\left\{ \left(\cos m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\left. - \left(\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\cos m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich in ganz analoger Weise folgender Ausdruck für $\frac{d^2 H}{dy^2}$ gewinnen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{dy^2} &= -H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^4 \cdot 2m^2 (\beta_1 + \beta_2)^3 \cdot X_1^2 \\ &\left\{ \left(\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\left. + \left(\cos m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\cos m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Die Lage der Maxima und Minima der Lichtintensität längs der Richtung der y ist also durch die Gleichung bestimmt:

$$(10) \quad \begin{cases} \left(\cos m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \\ = \left(\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\cos m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right). \end{cases}$$

Da der zweite Differentialquotient für die durch diese Gleichung bedingten Werthe von y die Form:

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = -H_0 \left(\frac{a}{a+v} \right)^4 \cdot 2m^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2)^2 \cdot X_1^2 \left\{ \left(\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\cos m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\} \frac{\sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}}}{\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}}}$$

annimmt, so entspricht dem durch die Gleichung (10) bestimmten y ein $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ der Lichtintensität, wenn die Grössen $\left(\sin m\beta_2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right)$ und $\left(\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right)$ für dieses y $\begin{cases} \text{gleiche} \\ \text{ungleiche} \end{cases}$ Vorzeichen haben.

5. Die nähere Bestimmung der Lage der Maxima und Minima der Lichtintensität aus der allgemeinen Gleichung (10) ist, sobald diese Bestimmung ganz allgemein durchgeführt werden soll, eine äusserst mühsame Aufgabe. Auf diese allgemeine Bestimmung will ich nicht eingehen; ich will mich begnügen, die Lage der Minima und Maxima in der Nähe der verticalen Hauptebene, also für Orte mit verhältnissmässig kleinen y , möglichst genau zu bestimmen, weil dieser specielle Fall der Rechnung keine Schwierigkeiten bietet, und dieser Fall zugleich von eminenter praktischer Wichtigkeit ist, da wohl in fast allen Fällen, in denen Fresnel'sche Interferenzfransen zur Verwendung kommen, nur die mittleren Fransen benutzt werden.

Zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima für kleine y drücken wir zunächst in der allgemeinen Bedingungsgleichung:

$$\left(\cos m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\sin m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \\ - \left(\sin m\beta_1^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I_{(m\beta_1^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\cos m\beta_2^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot E_{(m\beta_2^2)}^{\frac{1}{2}} \right) = 0$$

die Transcendenten $I^{\frac{1}{2}}$ und $E^{\frac{1}{2}}$ durch ihre semiconvergenten Reihen aus:

$$\left| \begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot I^{\frac{1}{2}}_{(m\beta_1^2)} &= \sin m\beta_1^2 + i_1 - e_1 & \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_1 \cdot E^{\frac{1}{2}}_{(m\beta_1^2)} &= \cos m\beta_1^2 - i_1 - e_1 \\ \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot I^{\frac{1}{2}}_{(m\beta_2^2)} &= \sin m\beta_2^2 + i_2 - e_2 & \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta_2 \cdot E^{\frac{1}{2}}_{(m\beta_2^2)} &= \cos m\beta_2^2 - i_2 - e_2 \end{aligned} \right|$$

wo der Kürze halber:

$$i_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_1^2}} - \frac{1.3}{\sqrt{2m\beta_1^6}} + \frac{1.3.5.7}{\sqrt{2m\beta_1^{10}}} - \dots \right)$$

$$i_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_2^2}} - \frac{1.3}{\sqrt{2m\beta_2^6}} + \frac{1.3.5.7}{\sqrt{2m\beta_2^{10}}} - \dots \right)$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_1^3}} - \frac{1.3.5}{\sqrt{2m\beta_1^7}} + \dots \right)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\beta_2^3}} - \frac{1.3.5}{\sqrt{2m\beta_2^7}} + \dots \right)$$

gesetzt ist und führen sodann die Multiplication aus. Das Resultat kann in die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} & -8 \sin \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} \right) \\ & + 2\sqrt{2} (i_2 - i_1) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & + 2\sqrt{2} (i_1 + i_2) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & - 2\sqrt{2} (e_2 - e_1) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & + 2\sqrt{2} (e_1 + e_2) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ & - 2i_2 e_1 + 2e_2 i_1 = 0. \end{aligned}$$

Zur weitem Behandlung führen wir jetzt die beschränkende Annahme ein: a , w und δ seien so beschaffen, und y so klein, dass die Grössen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_1^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_2^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_1^2}}$$

und mithin auch die Werthe e_1 , e_2 und $(i_2^2 - i_1^2)$ als verschwindend klein ausser Betracht gelassen werden dürfen. [Ist $a = w = 1000$ mm, $\delta = 3$ mm, $y = 0,5$ mm, $\lambda = 0,00064$ mm, so ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_1^2}} = 0,0003$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_1^2}} = 0,001$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_1^2}} = 0,0048$]. Dann kann die letzte Gleichung in die folgende Form gebracht werden:

$$\left[\cos \left(\frac{m \beta_1^2 - m \beta_2^2}{2} \right) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{m \beta_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{m \beta_2^2}} \right) \cos \left(\frac{m \beta_1^2 + m \beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\left[\sin \left(\frac{m \beta_1^2 - m \beta_2^2}{2} \right) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{m \beta_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{m \beta_2^2}} \right) \cos \left(\frac{m \beta_1^2 + m \beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0.$$

Die Lagen der Maxima und Minima sind also durch die beiden Gleichungen bestimmt:

$$\cos \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} - \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}} \cdot \frac{\delta \cdot w \cdot (a+w)}{\delta^2 w^2 - y^2 a^2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{a \cdot w (a+w)} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} - \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}} \cdot \frac{y a (a+w)}{\delta^2 w^2 - y^2 a^2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{a \cdot w (a+w)} + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

Für Orte, die in so grosser Nähe der verticalen Mittelebene ($y = 0$) liegen, dass $\left(\frac{y}{\delta} \cdot \frac{a}{w} \right)^2$ verschwindend klein gegenüber der Einheit ist, nehmen diese Gleichungen die einfachere Form an:

$$(11) \quad \cos \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} - \frac{\sqrt{\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{2\pi \operatorname{tg} \omega} \cos \left(\frac{\pi \operatorname{tg}^2 \omega}{\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)} + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

$$(12) \quad \sin \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} - \frac{y \sqrt{\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{2\pi \cdot w \cdot \operatorname{tg}^2 \omega} \sin \left(\frac{\pi \cdot \operatorname{tg}^2 \omega}{\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)} + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

wo 2ω den Winkel bezeichnet, unter welchem die beiden Lichtquellen von der gemeinschaftlichen Kante AC aus gesehen werden.

Eine Vergleichung dieser beiden Bedingungsgleichungen mit dem oben gegebenen Werthe des zweiten Differentialquotienten der Helligkeit nach der Richtung der y lässt erkennen, dass die erste der beiden Gleichungen die Lage der Helligkeitsminima, die letzte der beiden Gleichungen die Lage der Helligkeitsmaxima bestimmt.

Die aufeinander folgenden Helligkeitsminima haben also ungleiche Abstände; die Interferenzfransen sind mithin ungleich breit. Die Interferenzfransen müssen so lange

ungleiche Breite haben, als die Grösse $\frac{\sqrt{\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{2\pi \cdot \operatorname{tg} \omega}$ einen noch erheblichen Werth besitzt. In den bis jetzt angewandten Fresnel'schen Interferenzapparaten, bei denen zur Erzielung möglichst breiter Fransen ω sehr klein gewählt wurde, und deren Construction nur kleine Entfernungen a und w gestattete, ist der Werth dieser Grösse noch recht beträchtlich, z. B. gleich 0,064 für $a = w = 1000$ mm und für $2\omega = 20'$. In solchen Interferenzapparaten muss die Ungleichheit der Fransenbreiten scharf ausgeprägt hervortreten.

Nähere Aufschlüsse über die Ungleichheit der Fransenbreiten ergibt eine eingehende Betrachtung der Gleichung

$$(11). \text{ Ist } \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)} + \frac{\pi}{4} = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi, \text{ dann haben die}$$

Fransen in der Nähe der Mittelebene ($y=0$) genau gleiche Breite und zwar diejenige Breite, die sie nach der Fresnel'schen Theorie überall haben müssten; es mag diese Fransenbreite als ideale Fransenbreite bezeichnet werden.

Ist $\cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)} + \frac{\pi}{4} \right) = \begin{cases} \text{positiv,} \\ \text{negativ,} \end{cases}$ so ist die Breite der mittelsten Franse um eine gewisse Grösse $\begin{cases} \text{kleiner,} \\ \text{grösser,} \end{cases}$

als die ideale Breite; ihre Nachbarfransen haben eine um eben so viel $\left\{ \begin{array}{l} \text{grössere} \\ \text{kleinere} \end{array} \right.$ Breite als die ideale Fransbreite, sodass das arithmetische Mittel dieser beiden Fransbreiten gleich der idealen Fransbreite ist. An diese $\left\{ \begin{array}{l} \text{breiteren} \\ \text{schmäleren} \end{array} \right.$ Nachbarfransen reihen sich in der Richtung von der Mittelebene fort $\left\{ \begin{array}{l} \text{schmälere} \\ \text{breitere} \end{array} \right.$ Frans an, u. s. w. Für grössere y lässt sich das Gesetz der Variation der Fransbreite in keine einfache Form bringen.

Von den Abständen der aufeinander folgenden Helligkeitsmaxima gelten laut Gleichung (12) ganz analoge Sätze. Es sind aber die Ungleichheiten in den Abständen der aufeinander folgenden Helligkeitsmaxima viel kleiner als die Ungleichheiten in den Abständen der aufeinander folgenden Helligkeitsminima, da der Quotient der ersten Factoren der zweiten Glieder der Gleichungen (11) und (12) gleich $\frac{y}{\delta} \cdot \frac{a}{w}$ ist. In die verticale Mittelebene ($y=0$) fällt immer ein Helligkeitsmaximum.

Nachdem die Lage der Maxima und Minima der Helligkeit für die Orte in der Nähe der verticalen Mittelebene bestimmt worden ist, sollen jetzt die Werthe der in ihnen auftretenden Helligkeiten ermittelt werden. Zu diesem Zwecke ersetzen wir in dem allgemeinen Ausdrucke (9) der Lichtintensität die Transcendenten I und E durch ihre semiconvergenten Reihen:

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot I_{(m, \beta)}^{\frac{1}{2}} = \sin m\beta^2 + i - e$$

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot E_{(m, \beta)}^{\frac{1}{2}} = \cos m\beta^2 - i - e$$

und führen die Quadrirung der beiden Glieder aus. Wir erhalten nach mehreren Umgestaltungen:

$$H = 4 H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 X_1^2 \cdot \left\{ \cos^2 \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} (i_1 + i_2) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 + e_2) \cos \left(\frac{m\beta_1^2 - m\beta_2^2}{2} \right) \sin \left(\frac{m\beta_1^2 + m\beta_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4} (i_1 + i_2)^2 + \frac{1}{4} (e_1 + e_2)^2 \right\}.$$

Durch die Annahme, dass e_1 und e_2 verschwindend klein sind, dass sich mithin die Functionen i_1 und i_2 auf die ersten Glieder $\frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_1^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi m \beta_2^2}}$ ihrer Reihen reduciren, eine Annahme, die wir oben zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima der Helligkeit getroffen haben, gewinnen wir hieraus den einfachern Werth:

$$H = 4 H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X_1^2 \cdot \left\{ \cos^2 \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} - \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}} \frac{2\delta w(a+w)}{\delta^2 w^2 - y^2 a^2} \cdot \cos \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2 w^2 + a^2 y^2}{a \cdot w(a+w)} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{16\pi \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)} \left(\frac{2\delta w(a+w)}{\delta^2 w^2 - y^2 a^2} \right)^2 \right\}.$$

Da die Lage der Helligkeitsminima durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\cos \frac{2\pi \delta y}{\lambda(a+w)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}} \frac{\delta w(a+w)}{\delta^2 w^2 - y^2 a^2} \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{a \cdot w(a+w)} + \frac{\pi}{4} \right)$$

nimmt die Helligkeit in den Minimis folgenden Werth an:

$$H_{\min} = 4 H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X_1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg}^2 \omega - \left(\frac{y}{w} \right)^2} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{\operatorname{tg}^2 \omega + \left(\frac{y}{w} \right)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{w}} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Die minimale Helligkeit in der Nähe der Mittelebene ist also wesentlich abhängig von a , w und ω . Sie wird nur dann

gleich Null, wenn der Bogen $\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega + \left(\frac{y}{w}\right)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{w}} + \frac{\pi}{4} = \pi \cdot n$

ist; für dasselbe a , w und ω nimmt sie mit wachsendem y zu. Da die wesentlich bestimmende Grösse in dem Ausdrücke der minimalen Helligkeit das Quadrat desjenigen Werthes ist, der die kleinen Ungleichheiten der Fransenbreiten bedingt, so wird die minimale Helligkeit in der Nähe der Mittelebene stets so klein bleiben, dass sie der Beobachtung nahezu als Helligkeit Null erscheinen wird.

Die Lichtstärke, welche in den durch die Gleichung (12) bestimmten Maximis auftritt, hat den Werth:

$$H_{\max} = 4H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X_1^2 \cdot \left\{ 1 - 2 \left(\frac{V \lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg}^2 \omega - \left(\frac{y}{w} \right)^2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \omega + \left(\frac{y}{w} \right)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{w}} + \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{V \lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg}^2 \omega - \left(\frac{y}{w} \right)^2} \right)^2 \right\}.$$

Auch dieses Resultat macht recht evident, wie weit sich Fresnel's Theorie von dem wahren Sachverhalte entfernt. Nach Fresnel's Theorie ist die maximale Helligkeit constant und zwar gleich demjenigen Werthe, der sich aus dem eben gefundenen Ausdrücke ergibt, wenn an die Stelle des letzten, oscillirenden Factors die Einheit gesetzt wird. In Wahrheit ist diese maximale Helligkeit ganz bedeutenden Schwankungen unterworfen. Für die Orte in unmittelbarer Nähe der verticalen Mittelebene oscillirt sie zwischen dem kleinsten Werthe:

$$4H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X_1^2 \left(1 - \frac{V \lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg}^2 \omega - \left(\frac{y}{w} \right)^2} \right)^2$$

und dem grössten Werthe:

$$4 H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X_1^2 \left(1 + \frac{V_{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg}^2 \omega - \left(\frac{y}{w} \right)^2} \right)^2$$

auf und ab. Die Grösse dieser Schwankung der maximalen Helligkeit im Verhältnisse zum Mittelwerthe der maxi-

malen Helligkeit ist angenähert gleich $\frac{2}{\pi} \frac{V_{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w} \right)}{\operatorname{tg} \omega}$; für $a = w = 1000 \text{ mm}$ und $\omega = 20'$ schwankt demnach der Betrag der maximalen Helligkeit um ca. 25% seines Mittelwerthes.

Für die Lage der Maxima und Minima der Lichtintensität und für die Werthe der Maxima und Minima ist vor allem die Grösse des Bogens $\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{a \cdot w (a+w)} + \frac{\pi}{4}$ massgebend. Es lässt sich zeigen, dass die Länge $\frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{a w (a+w)}$ eine einfache Bedeutung besitzt. Eine durch den Ort Q parallel zur yz -Ebene gelegte Ebene schneidet die virtuellen linienförmigen Lichtquellen, resp. deren Verlängerungen, und die Kante AC des Interferenzapparates. Die drei Schnittpunkte sollen der Reihe nach R_1 , R_2 und O heissen. Es ist:

$$\begin{array}{l} R_1 O = a + \frac{\delta^2}{2a} \\ R_2 O = a + \frac{\delta^2}{2a} \end{array} \quad \left| \quad OQ = w + \frac{y^2}{2w} \right. \quad \begin{array}{l} R_1 Q = a + w + \frac{(\delta - y)^2}{2(a+w)} \\ R_2 Q = a + w + \frac{(\delta + y)^2}{2(a+w)} \end{array}$$

Daraus folgt:

$$R_1 O + OQ - R_1 Q = A_1 = \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{2a \cdot w (a+w)} + \frac{\delta y}{a+w}$$

und:

$$R_2 O + OQ - R_2 Q = A_2 = \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{2a \cdot w (a+w)} - \frac{\delta y}{a+w}$$

und:

$$A_1 + A_2 = \frac{\delta^2 w^2 + y^2 a^2}{a \cdot w (a+w)}.$$

Der oben genannte Bogen lässt sich also schreiben:

$$\pi \frac{(A_1 + A_2)}{\lambda} + \frac{\pi}{4}.$$

6. Zum Schlusse sollen noch einige Betrachtungen über die Lichtvertheilung in der verticalen Mittelebene ($y = 0$) angestellt werden. In dem Falle, dass $y = 0$ ist, wird $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\delta w}{a + w} = \beta$, und dadurch reducirt sich der allgemeine Ausdruck der Lichtintensität auf:

$$H = H_0 \left(\frac{a}{a + w} \right)^2 \cdot X_1^2.$$

$$\left\{ \left(\sin m\beta^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot I_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\cos m\beta^2 + \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot E_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}.$$

Durch Einführung der Werthe:

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot I_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}} = \sin m\beta^2 + i - e$$

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \cdot \beta \cdot E_{(m\beta^2)}^{\frac{1}{2}} = \cos m\beta^2 - i - e$$

und durch einige Umformungen lässt sich diese Form in die folgende überführen:

$$H = 4 H_0 \left(\frac{a}{a + w} \right)^2 \cdot X_1^2.$$

$$\left\{ \left[\cos \left(m\beta^2 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right]^2 + \left[\sin \left(m\beta^2 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} e \right]^2 \right\}.$$

In dieser einfachen Formel sind alle die mannichfaltigen Thatsachen ausgedrückt, welche die Beobachtungen an der Mitte der centralen Franse constataren können. Die Beobachtungen zeigen, dass die Helligkeit der Mitte der centralen Franse bei Anwendung von homogenem Lichte ganz beträchtlichen Oscillationen längs der Richtung der w unterworfen ist, deren Amplitude mit wachsendem w langsam abnimmt; dieses steht in genauester Uebereinstimmung mit dem vorstehenden Helligkeitsausdrucke. Ferner ist, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben worden ist, die Mitte der centralen Franse bei Anwendung von weissem Lichte niemals weiss, sondern immer gefärbt, und zwar leuchtet diese Mitte in den verschiedenen Entfernungen w mit ganz verschiedenen Farben. Auch diese Thatsache ist qualitativ in dem vorstehenden Intensitätsausdrucke

enthalten, denn der Werth von H erscheint als Function der Grössen a , w , δ und der Wellenlänge λ . Dass nun aber auch die bestimmte Farbenfolge in der Mitte der centralen Franse längs der Richtung der w , die in den einleitenden Worten dieser Abhandlung angegeben wurde, in dem gefundenen Werthe von H eingeschlossen ist, lässt sich durch folgende Bemerkung einsehen.

Hätten wir in den drei ersten Abschnitten nicht die Lichtintensität gesucht, welche durch das Zusammenwirken der beiden von den rechteckig begrenzten sphärischen Wellenflächen ACE_1F_1 und ACE_2F_2 ausgehenden Wellensystemen in einem auf der verticalen Mittelebene ($y=0$) gelegenen Orte Q erzeugt wird, hätten wir uns vielmehr die einfachere Aufgabe gestellt, die Lichtstärke H für denselben Ort Q zu bestimmen, wenn derselbe nur von dem einen der beiden Wellensysteme bestrahlt wird, so wären wir zu dem Resultate gelangt:

$$H = H_0 \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \cdot X_1^2 \left\{ \left[\cos \left(m\beta^2 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right]^2 + \left[\sin \left(m\beta^2 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} e \right]^2 \right\}.$$

Die Lichtstärke, welche auf einem in der verticalen Mittelebene gelegenen Orte Q durch die Interferenz der beiden Wellensysteme erzeugt wird, ist also gleich dem vierfachen Werthe derjenigen Lichtstärke, die in demselben Orte durch die alleinige Thätigkeit des einen Wellensystems hervorgebracht wird. Die resultirende Färbung der Mitte der centralen Interferenzfranse in irgend einer Entfernung w von dem Interferenzapparate ist mithin genau dieselbe wie die Färbung, die derselbe Ort zeigt, wenn das eine Wellensystem abgeblendet und nur das andere in Wirksamkeit gelassen wird. Dieses theoretische Resultat steht mit den Thatsachen in vollkommenem Einklange.

Auch Billet's Theorie der von ihm eingeführten „Billet'schen Interferenzerscheinungen“ enthält den oben besprochenen Fehler der Fresnel'schen Theorie. Auch Billet's Interferenzerscheinungen stehen unter dem Einflusse der Diffraction und sind in ganz analoger Weise theoretisch zu behandeln wie die Fresnel'schen Interferenzerscheinungen. Ich gehe hier nicht näher darauf ein, da die Wiedergabe der Rechnung nichts wesentlich Neues enthalten würde.

In allen Verwendungen, welche die Fresnel'schen und Billet'schen Interferenzfransen in der messenden Physik bisher gefunden haben, ist die fehlerhafte Fresnel'sche Theorie zu Grunde gelegt worden. Es ist zu wünschen, dass die wichtigsten dieser Arbeiten, ich erinnere nur an die scharfsinnig angelegten messenden Versuche über Luftschwingungen von Töpler und Boltzmann, einer Revision unterworfen werden.

IV. *Ueber den Einfluss der Temperatur auf Stimmgabeln; von Heinrich Kayser.*

Eins der wichtigsten Hilfsmittel zur Messung sehr kurzer Zeiten sind die Stimmgabeln, die man ihre Schwingungen auf einen rotirenden berussten Cylinder aufzeichnen lässt, während man neben der so entstehenden Curve auf irgend eine Weise am Anfange und Ende der zu messenden Zeit eine Marke macht. Zur genauen Zeitbestimmung ist dann aber eine sehr genaue Kenntniss der Schwingungszahl der Stimmgabel nothwendig, und es liegen daher zahlreiche Untersuchungen über den Einfluss aller möglichen Umstände auf diese Schwingungszahl vor. Merkwürdiger Weise ist aber bisher der Einfluss der Temperatur noch wenig berücksichtigt worden, nur gelegent-

lich findet man einen solchen erwähnt, und diese Angaben widersprechen sich. So sagt Poske¹⁾: eine Angabe der Schwingungszahl ohne Angabe der Temperatur, bei der sie bestimmt worden, sei werthlos; dagegen gibt Vogel²⁾ an, Temperaturunterschiede von 60° bis 70° seien noch kaum bemerkbar; am meisten hat sich mit der Frage Mercadier³⁾ beschäftigt, er hat sogar einen Versuch über den Einfluss der Temperatur angestellt, hat ihn aber nicht weiter verfolgt und ist zu dem falschen Schlusse gekommen, dass, wenn die Temperaturschwankungen nicht zu bedeutend sind, die Schwingungszahl bis auf 0,0001 constant bleibe.

Bei dieser Verschiedenheit der Angaben schien es mir, als ich bei meinen Untersuchungen wiederholt zu genauer Bestimmung der Schwingungszahl von Stimmgabeln gezwungen war, doch wünschenswerth, den Temperatureinfluss sicher festzustellen, und es ist mir dies durch Beobachtung der Aenderung des Phasenunterschiedes zweier Gabeln mit der Temperatur auch gelungen. Die Methode gestattete genaue Bestimmung des Unterschiedes der Schwingungszahlen beider Gabeln bis auf die vierte oder fünfte Decimale, sodass eine Temperaturänderung von $0,1^{\circ}$ C. noch hätte beobachtet werden können, wenn es überhaupt möglich wäre, die Temperatur einer Stimmgabel so weit constant zu erhalten und genau zu bestimmen. Aus der Aenderung der Schwingungszahl mit der Temperatur hat sich dann weiter ergeben, wie der Elasticitätscoëfficient des Stahles sich mit der Temperatur ändert, worüber eine Angabe von Wertheim⁴⁾ bereits vorliegt.

Meine Methode war folgende. Zwei Gabeln von beinahe gleicher Schwingungszahl waren mit Spiegeln versehen und gestatteten die Beobachtung der Lissajous'schen Figuren mittelst eines Fernrohrs. Die Gabeln waren um-

1) Pogg. Ann. CLII. p. 463. 1874.

2) Pogg. Ann. CLVIII. p. 305. 1876.

3) Journ. de phys. V. 1876.

4) Ann. d. chem. et phys. (3) XII. 1844.

geben von Blechgefässen mit doppelten Wänden; die Gefässe hatten Fensteröffnungen, die der Lage der Spiegel entsprachen und den Lichtstrahl ein- und austreten liessen. Zwischen die beiden Wände wurde Eis gelegt, oder es wurde Wasser hindurchgeleitet, oder es befand sich Luft dazwischen. Die Deckel der Gefässe hatten zwei Oeffnungen, um erstens ein Thermometer in den innern Luft-raum, in dem die Gabeln sich befanden, einführen zu können, und um zweitens den Stiel einer Klemme hindurch zu lassen, in welche die Gabelzinken eingeklemmt waren; durch das Abziehen dieser Klemme von der Gabel wird letztere zum Tönen gebracht. Auf diese Weise konnte ich der die Gabeln umgebenden Luft verschiedene constante Temperaturen ertheilen und dann die Gabeln von aussen anregen. Bequemer wären electromagnetisch erregbare Gabeln gewesen, indessen wollte ich diese nicht gebrauchen, weil sie anderen Gesetzen folgen, als die gewöhnlichen Gabeln, und daher neue Complicationen in die zu beobachtenden Erscheinungen bringen.

Sehr erschwerend und die Genauigkeit beeinträchtigend wirkt bei der sonst so einfachen Methode der Umstand, dass die Stimmgabeln nur sehr langsam die Temperatur der umgebenden Luft annehmen, und letztere ein bis zwei Stunden constant erhalten werden muss, bevor die Stimmgabel constante Temperatur angenommen hat; man erkennt das daran, dass erst nach Verlauf dieser Zeit die Phasendifferenz zwischen den beiden Gabeln sich nicht mehr ändert. Blieb die Phasendifferenz constant, so habe ich angenommen, dass die Gabeln die Temperatur der umgebenden Luft, die ich an den Thermometern ablas, angenommen hatten.

Indem ich so den Gabeln verschiedene Temperaturen, die zwischen 0° und 26° lagen, gab, beobachtete ich mittelst der Lissajous'schen Figuren die Dauer einer Schwebung. Die Gabeln tönten etwa 150 bis 200 Secunden lang, sodass die Dauer der Schwebung, die meist zwischen 5 und 30 Secunden lag, mit grosser Genauigkeit bestimmt

werden konnte, und daraus liess sich dann der Unterschied der beiden Schwingungszahlen berechnen.

Ich benutzte König'sche Stimmgabeln, die zur Beobachtung der Lissajous'schen Figuren bestimmt und daher mit Stahlspiegeln und Laufgewichten zur Aenderung der Schwingungszahl versehen waren. Die Versuche umfassen drei Gabeln, von denen I und III ohne Laufgewichte benutzt sind und 72, resp. 85 ganze Schwingungen nach König's Angabe machen; Gabel II konnte durch Verstellung des Laufgewichtes so verstimmt werden, dass sie 72 oder 85 Schwingungen machte.

Zur Messung der Schwebungsdauer diente ein Chronograph, dessen Trommel durch ein Uhrwerk gedreht wurde; auf ihm wurden durch eine Uhr von Tiede die $\frac{1}{30}$ Minuten markirt; neben dem Schreibstifte für die Zeit befand sich ein zweiter, mit dem nach jeder halben Schwebung, nämlich wenn die sich verändernde Lissajous'sche Ellipse durch die gerade Linie hindurchging, ein Zeichen gemacht wurde.

Zunächst verglich ich Gabel I und II, indem beide etwa 72 Schwingungen machten; meine Beobachtungen ergaben nachstehende Tabelle 1, wo N die Versuchsnummer, t_1 und t_2 die Temperaturen von Gabel I und II, a die Dauer einer Schwebung in $\frac{1}{30}$ Minuten, b die daraus berechnete Differenz der Schwingungszahlen bedeutet.

(Siehe Tabelle 1 p. 448.)

Nimmt man nun etwa die Versuche 1—31 zusammen und betrachtet in ihnen die Temperatur der Gabel I als constant = $0,6^\circ \text{C.}$, so variirt in den Versuchen die Temperatur der Gabel II von $1,3^\circ$ bis $24,6^\circ$, und die Unterschiede in den Werthen b rühren nur von der durch die Temperatur bewirkten Aenderung des Tones von II her. Trägt man die Werthe b als Ordinaten, die zugehörigen t_2 als Abscissen auf, so erhält man eine Curve, welche die Veränderung der Schwingungszahl von II mit der Temperatur anzeigt; diese Curve ist eine gerade Linie, d. h. die Aenderung der Schwingungszahl ist proportional der Temperatur.

Tabelle 1.

N	t_1	t_2	a	b	N	t_1	t_2	a	b
1	0,4	1,8	19,600	0,06800	31	0,8	20,7	17,450	0,07641
2	0,4	2,6	24,800	0,05376	32	1,0	5,2	36,666	0,03638
3	0,4	5,0	50,000	0,02667	33	1,0	22,7	14,569	0,09152
4	0,4	4,8	40,333	0,03306	34	1,4	6,4	42,000	0,03174
5	0,4	20,0	17,636	0,07560	35	14,2	20,6	150,000	0,00889
6	0,4	24,6	12,099	0,11020	36	14,9	20,1	84,000	0,01587
7	0,6	5,5	37,250	0,03579	37	15,0	2,5	9,158	0,14559
8	0,6	4,6	48,000	0,02777	38	15,3	18,9	48,000	0,02778
9	0,6	4,8	40,333	0,03306	39	15,3	19,6	72,857	0,01830
10	0,6	5,4	40,800	0,03268	40	15,3	20,0	89,500	0,01498
11	0,6	3,8	23,500	0,05674	41	15,4	2,5	9,200	0,14493
12	0,6	4,1	25,333	0,05264	42	15,4	19,2	42,750	0,03119
13	0,6	4,0	29,405	0,04534	43	16,3	16,0	30,875	0,04318
14	0,6	4,6	28,800	0,04318	44	18,5	18,5	24,750	0,05387
15	0,6	3,6	29,250	0,04558	45	18,6	4,3	8,588	0,15525
16	0,6	16,4	22,545	0,05914	46	18,6	4,3	8,529	0,15633
17	0,6	16,8	21,333	0,06251	47	18,6	4,3	8,579	0,15542
18	0,6	18,0	19,625	0,06794	48	19,0	18,5	27,250	0,04893
19	0,6	18,4	19,333	0,06896	49	19,6	3,0	7,765	0,17171
20	0,6	19,0	18,888	0,07059	50	20,3	2,6	7,417	0,17977
21	0,6	19,7	18,000	0,07407	51	21,1	2,0	7,400	0,18018
22	0,6	19,8	17,666	0,07547	52	21,1	2,6	7,100	0,18780
23	0,6	16,0	30,875	0,04318	53	21,3	2,5	6,837	0,19501
24	0,6	20,0	19,543	0,06823	54	21,3	21,0	27,514	0,04846
25	0,6	20,0	18,666	0,07145	55	21,3	21,5	29,400	0,04535
26	0,6	21,6	15,700	0,08493	56	21,4	2,2	7,000	0,19048
27	0,6	23,0	14,666	0,09091	57	21,5	21,6	27,875	0,04783
28	0,6	23,0	13,095	0,10183	58	21,6	2,6	6,857	0,19445
29	0,8	1,3	16,983	0,07850	59	22,8	1,7	6,571	0,20290
30	0,8	4,2	24,571	0,05426	60	22,8	2,0	6,500	0,20510
					61	24,2	3,5	6,400	0,20830

Die Gleichung der gefundenen Curve ist also $y = \alpha_2 x + \beta_2$, wo α_2 die Aenderung der Schwingungszahl von II pro Grad, β_2 den Unterschied beider Gabeln bei 0° angibt. Die Werthe von α_2 und β_2 kann man angenähert berechnen aus zwei beliebigen Versuchen, z. B. aus 6 und 29.

Nimmt man nun die Versuche, in denen II niedrige, aber verschiedene Temperaturen hat, also die Versuche 1–4, 7–15, 29–30, 32, 34, 37, 41, 45–47, 49–53, 56, 58–61, so kann man mit Hülfe des angenäherten Werthes von α_2 berechnen, wie gross in jedem Versuche die Differenz

der Schwingungszahlen gewesen wäre, wenn die Temperatur von II stets die gleiche, z. B. 3° C. gewesen wäre. Diese corrigirten Werthe von b seien b_1 . Aus t_1 und b_1 kann man dann mittelst der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinliche Gleichung der Curve für Gabel I finden.

Diese Rechnung habe ich ausgeführt, und ich erhielt für Gabel I, wenn Gabel II = 3° C. war:

$$(1) \quad y = -0,0064x - 0,0487.$$

Die Vorzeichen der Coëfficienten sind so gewählt, dass ein negatives Zeichen bedeutet, dass Gabel I tiefer ist als Gabel II.

Ich gebe in Tabelle 2 die beobachteten und die nach (1) berechneten Werthe von b_1 , sowie die Differenzen beider.

Tabelle 2.
Stimmgabel I. Gabel II = 3° C.

t_1	b_1 beob.	b_1 ber.	Differenz	t_1	b_1 beob.	b_1 ber.	Differenz
0,4	-0,0408	-0,0513	+0,0105	1,4	-0,0548	-0,0576	+0,0028
0,4	-0,0403	-0,0513	+0,0110	15,0	-0,1422	-0,1447	+0,0025
0,4	-0,0510	-0,0513	+0,0003	15,4	-0,1415	-0,1467	+0,0052
0,4	-0,0599	-0,0513	-0,0086	18,6	-0,1641	-0,1670	+0,0029
0,6	-0,0527	-0,0526	-0,0001	18,6	-0,1642	-0,1670	+0,0028
0,6	-0,0386	-0,0526	+0,0140	18,6	-0,1652	-0,1670	+0,0018
0,6	-0,0452	-0,0526	+0,0074	19,6	-0,1717	-0,1739	+0,0022
0,6	-0,0489	-0,0526	+0,0037	20,3	-0,1771	-0,1779	+0,0008
0,6	-0,0601	-0,0526	-0,0075	21,1	-0,1851	-0,1829	-0,0022
0,6	-0,0496	-0,0526	+0,0030	21,1	-0,1734	-0,1829	+0,0095
0,6	-0,0622	-0,0526	-0,0096	21,3	-0,1916	-0,1842	-0,0074
0,6	-0,0521	-0,0526	+0,0005	21,4	-0,1851	-0,1848	-0,0003
0,6	-0,0591	-0,0526	-0,0065	21,6	-0,1917	-0,1861	-0,0056
0,8	-0,0624	-0,0538	-0,0086	22,8	-0,1941	-0,1937	-0,0004
0,8	-0,0670	-0,0538	-0,0132	22,8	-0,1983	-0,1937	-0,0046
1,0	-0,0513	-0,0551	+0,0038	24,2	-0,2117	-0,2027	-0,0090

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen eine sehr gute, wenn man berücksichtigt, wie schwer, wenn nicht geradezu unmöglich, eine genaue Bestimmung der Temperatur der Stimmgabeln ist; fast alle Fehler lassen sich durch eine

Ungenauigkeit der Temperaturbestimmung um $0,2^\circ$ bis $0,5^\circ$ erklären, und eine grössere Genauigkeit glaube ich auch durchaus nicht annehmen zu können.

Es ergibt sich also aus Gleichung (1), dass die Schwingungszahl von Gabel I pro Grad Erwärmung um 0,0064 abnimmt.

In gleicher Weise, wie oben, habe ich die Versuche, bei denen Gabel II hohe Temperaturen hatte, also 5—6, 16—28, 31, 33, 35—36, 38—40, 42—44, 48, 54—55, 57 berechnet, indem ich die b reducirte auf eine Temperatur der Gabel II von 20° C. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergab dann folgende Gleichung:

$$(2) \quad y = -0,0064x + 0,0811.$$

Der Coëfficient für den Einfluss der Temperatur stimmt also in beiden Bestimmungen in den vier ersten Stellen nach dem Komma, d. h. die Dauer der Schwingung ist bestimmt bis auf 0,00001 Secunde.

Die nach (2) berechneten und die beobachteten Werthe, sowie die Differenzen sind:

Tabelle 3.
Stimmgabel I. Gabel II = 20° C.

t_1	b_1 beob.	b_1 ber.	Differenz	t_1	b_1 beob.	b_2 ber.	Differenz
0,4	+0,0756	+0,0785	-0,0029	0,8	+0,0718	+0,0759	-0,0041
0,4	+0,0734	+0,0785	-0,0051	1,0	+0,0699	+0,0746	-0,0047
0,6	+0,0682	+0,0772	-0,0090	14,2	-0,0135	-0,0105	-0,0030
0,6	+0,0715	+0,0772	-0,0057	14,9	-0,0167	-0,0150	-0,0017
0,6	+0,0778	+0,0772	+0,0006	15,3	-0,0190	-0,0176	-0,0024
0,6	+0,0866	+0,0772	+0,0094	15,3	-0,0157	-0,0176	+0,0019
0,6	+0,0879	+0,0772	+0,0107	15,3	-0,0150	-0,0176	+0,0026
0,6	+0,0881	+0,0772	+0,0109	15,4	-0,0241	-0,0182	-0,0059
0,6	+0,0839	+0,0772	+0,0067	16,3	-0,0112	-0,0240	+0,0128
0,6	+0,0818	+0,0772	+0,0046	18,5	-0,0419	-0,0382	-0,0037
0,6	+0,0786	+0,0772	+0,0014	19,0	-0,0369	-0,0415	+0,0046
0,6	+0,0797	+0,0772	+0,0025	21,3	-0,0574	-0,0563	-0,0011
0,6	+0,0771	+0,0772	-0,0001	21,3	-0,0565	-0,0563	-0,0002
0,6	+0,0721	+0,0772	-0,0051	21,5	-0,0606	-0,0576	-0,0030
0,6	+0,0696	+0,0772	-0,0076				

Mit Hülfe des Coëfficienten 0,0064 kann man nun die Werthe b_2 berechnen, die b haben würde, wenn in

den Versuchen 1—34 Gabel I = 0° wäre, oder in den Versuchen 43—61 Gabel I = 20° . Die Gleichungen, die ich für beide Fälle erhielt, waren:

$$(3) \quad y = 0,0076x - 0,0720 \quad \text{und:}$$

$$(4) \quad y = 0,0076x - 0,1991.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet auch hier, dass Gabel I tiefer ist als Gabel II, also das positive, dass Gabel II tiefer ist als Gabel I.

Die Differenzen zwischen den beobachteten und den nach (3) und (4) berechneten Werthen von b_2 sind von derselben Größenordnung, wie die in Tabelle 2 und 3.

Es ergibt sich also für Gabel II eine Aenderung der Schwingungszahl um 0,0076 pro Grad.

Durch Verschieben der Laufgewichte brachte ich nun die Schwingungszahl von II auf 85; ich will die Gabel nun mit II_a bezeichnen. Mit ihr wurde die Gabel III verglichen, und ich erhielt folgende Tabelle, wo t_1 , t_2 die Temperaturen von Gabel II_a und III, a die Dauer der Schwebung in $\frac{1}{80}$ Sekunden, b die Differenz zwischen den Schwingungszahlen beider Gabeln bedeutet.

Tabelle 4.

<i>N</i>	t_1	t_2	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>N</i>	t_1	t_2	<i>a</i>	<i>b</i>
1	0,5	1,2	19,214	0,0694	17	1,2	24,2	5,625	0,2370
2	0,6	19,2	6,555	0,2034	18	1,4	24,2	5,750	0,2319
3	0,6	19,4	6,500	0,2051	19	1,8	25,0	5,280	0,2525
4	0,6	19,5	6,400	0,2083	20	2,2	22,4	5,845	0,2281
5	0,6	20,2	6,045	0,2206	21	2,6	24,4	5,875	0,2270
6	0,6	20,9	5,760	0,2315	22	5,8	23,6	6,539	0,2039
7	0,6	21,8	6,143	0,2171	23	15,4	2,3	54,500	0,0245
8	0,6	22,4	6,000	0,2222	24	15,4	4,7	95,000	0,0140
9	0,8	1,2	18,000	0,0741	25	17,2	17,5	16,750	0,0796
10	0,8	1,4	19,333	0,0690	26	17,2	17,5	16,757	0,0796
11	0,9	17,0	6,649	0,2005	27	17,6	5,0	39,289	0,0339
12	1,0	1,4	19,571	0,0681	28	18,5	18,7	16,833	0,0792
13	1,0	22,4	5,560	0,2393	29	18,5	18,7	16,971	0,0785
14	1,0	23,0	5,440	0,2451	30	20,1	20,2	16,571	0,0805
15	1,0	23,5	5,280	0,2525	31	20,1	20,3	16,857	0,0795
16	1,1	20,9	6,200	0,2151	32	20,1	20,3	17,000	0,0784

<i>N</i>	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>N</i>	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>a</i>	<i>b</i>
33	20,6	20,8	15,871	0,0840	43	22,8	22,9	16,143	0,0826
34	20,7	21,0	14,400	0,0926	44	23,5	23,5	16,700	0,0798
35	20,7	21,0	14,600	0,0913	45	24,0	2,5	12,857	0,1039
36	20,8	21,0	16,429	0,0312	46	24,1	24,6	15,800	0,0844
37	20,9	2,1	16,333	0,0816	47	24,2	24,5	15,625	0,0853
38	21,4	2,0	16,071	0,0830	48	24,5	3,8	13,100	0,1018
39	21,8	3,8	17,937	0,0743	49	25,6	26,0	15,714	0,0848
40	21,8	22,0	16,666	0,0800	50	25,8	26,2	15,714	0,0848
41	21,9	22,1	16,875	0,0790	51	26,8	27,4	15,429	0,0864
42	22,6	22,5	16,400	0,0813					

Ganz in derselben Weise wie für Gabel I und II berechnete ich die Curven für II_a und III und erhielt für Gabel II_a bei III = 21° C.:

$$(5) \quad y = -0,0071x + 0,2304$$

und für Gabel III bei II_a = 20° C.:

$$(6) \quad y = 0,0085x - 0,0911.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet hier, dass Gabel II_a tiefer als III ist.

Die Abweichungen der beobachteten Grössen von den nach (5) und (6) berechneten liegen wieder innerhalb der Fehlergrenzen.

Es wäre nun zu untersuchen, in welcher Beziehung der für die vier Gabeln gefundene Coëfficient für die Temperaturänderung zu den Verhältnissen der Gabeln steht. Versteht man unter Länge einer Gabel die Projection ihrer Zinken auf die Gabelaxe, so sind für die vier Gabeln die Länge, die Zinkendicke, die Schwingungszahl und der Coëfficient:

für I	:	232 mm;	6,5 mm;	72;	0,0064
„ II	:	210 „;	6,25 „;	72;	0,0076
„ II _a	:	210 „;	6,25 „;	85;	0,0071
„ III	:	195 „;	6,0 „;	85;	0,0085

Man sieht daraus, dass der Coëfficient von der Länge oder Schwingungszahl abhängt, und zwar ist er desto grösser, je kleiner die Gabel, je höher ihr Ton ist; ganz allein von

der Länge hängt er aber nicht ab, weil sonst die Zahlen für II und II_a die gleichen sein müssten. Es ist auch von vorn herein anzunehmen, dass die Massenvertheilung an den Gabeln, z. B. die Stellung der Laufgewichte, von Einfluss sein muss; diese Stellung war nun eine ähnliche einerseits für I und II_a, andererseits für II und III. Vergleicht man die Coëfficienten für I und II_a, so findet man, dass sie nahezu proportional zur Wurzel aus der Schwingungszahl sind, und ebenso die Coëfficienten für II und III. Indessen wird man wohl für jede einzelne Stimmgabel den Coëfficienten experimentell bestimmen müssen, da es nicht möglich sein wird, allen Abweichungen in der Form Rechnung zu tragen.

Es erübrigt nun noch die Benutzung der Resultate zur Bestimmung des Einflusses der Temperatur auf den Elasticitätscoëfficienten des Stahles.

Nach der Theorie der Elasticität hat man für den tiefsten Ton eines transversal schwingenden Stabes die Gleichung:

$$n = \frac{\rho^2}{2\pi} \frac{D}{L^2} \sqrt{\frac{g}{12\epsilon s}}$$

wo ρ als Wurzel der Gleichung $(e^{\rho} + e^{-\rho}) \cos \rho + 2 = 0$ = 1,8751 ist, D die Dicke, L die Länge der Gabel bedeutet, ϵ den Elasticitätscoëfficienten, s die spezifische Dichte des Stahles. Nach den Untersuchungen von Mercadier¹⁾ gilt diese Gleichung auch für Stimmgabeln. Wir werden daher für eine Stimmgabel bei der Temperatur t haben:

$$n_t = 0,55701 \frac{D_t}{L_t^2} \sqrt{\frac{g}{12\epsilon_t s_t}},$$

also:
$$\epsilon_t = \frac{0,55701^2 \cdot g \cdot D_t^2}{n_t^2 L_t^4 \cdot 12 s_t},$$

folglich:
$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_{t-1}} = \frac{n_{t-1}^2 [1 + \alpha(t-1)]^2 [1 + 3\alpha t]}{n_t^2 (1 + \alpha t)^2 [1 + 3\alpha(t-1)]},$$

1) Compt. rend. LXXIX. p. 1070. 1874.

wo $\alpha = 0,000\,0112$ den linearen Ausdehnungscoefficienten des Stahles bedeutet.

Man kann darnach für den Umfang der Versuche, d. h. zwischen etwa 0° und 30° C. die Veränderung des Elasticitätscoefficienten berechnen, und man findet, dass z. B. für den Stahl der Gabel I die Gleichung gilt: $\epsilon_t = 1,000\,190^t \epsilon_0$, für den Stahl der Gabel III: $\epsilon_t = 1,000\,212^t \epsilon_0$. Allerdings können diese Zahlen bei den geringen Temperaturänderungen, aus denen sie bestimmt sind, keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen; indess erkennt man doch zweifellos, dass der Elasticitätscoefficient des Stahles mit steigender Temperatur zunimmt, nicht, wie bei den meisten Metallen, abnimmt. Es stimmt dies überein mit den Resultaten von Wertheim, welcher fand, dass für Stahl und Eisen der Elasticitätscoefficient bis 100° zunimmt, bei höheren Temperaturen aber wieder abnimmt. Ist letzteres richtig, so würde auch die Gleichung für die Aenderung der Schwingungszahl mit der Temperatur für höhere Temperaturen als 30° nicht gelten, es würde die berechnete Curve keine gerade Linie, sondern eine Curve höherer Ordnung sein.

Die Resultate meiner Versuche sind folgende:

1) Die Schwingungszahl einer Stimmgabel ist nicht unabhängig von der Temperatur, sondern zwischen 0° und 30° lineare Function der Temperatur.

2) Der Einfluss der Temperatur ist um so grösser, je höher der Ton der Gabel ist, und zwar ist bei gleich gestalteten Gabeln die Aenderung der Schwingungszahl pro Grad etwa proportional der Wurzel aus der Schwingungszahl.

3) Bei mässigen Temperaturschwankungen, wie sie im Zimmer vorkommen, beeinflusst die Temperatur die Schwingungszahl in der zweiten Stelle nach dem Komma.

4) Der Elasticitätscoefficient von Stahl nimmt zwischen 0° und 30° mit der Temperatur zu.

Berlin, Juli 1879.

V. Ueber galvanische Leitung von Metalllegirungen; von Emil Elsässer.

Nach den Untersuchungen von Obach¹⁾, durch welche die früheren von Girardin²⁾ widerlegt wurden, leiten Legirungen von Blei und Zinn, Kalium und Natrium und Natriumamalgam, also Legirungen eigentlicher Metalle den electrischen Strom als Leiter erster Classe, ohne zer- setzt zu werden. Da nun andererseits Verbindungen von Metallen mit nicht metallischen Stoffen meist electrolysirt werden, so blieb es fraglich, wie sich Verbindungen von Metallen mit halbmetalischen Elementen wie Arsen, Antimon, Wismuth, Tellur verhalten.

Um diese Frage zu beantworten, habe ich im Laboratorium des Hrn. Prof. Lothar Meyer die Legirungen einiger Metalle mit Antimon und Wismuth untersucht und theile meine Resultate im Folgenden mit.

In das eine Ende einer geraden, 15 cm langen, schwer schmelzbaren Glasröhre von etwa 1 cm lichter Weite wurde mittelst eines Kittes aus Asbest und Wasserglas eine als Electrode dienende harte Gaskohle etwa 1 cm tief eingekittet, sodass die Stirnfläche derselben frei war, die Röhre dann in einem Stativ senkrecht festgeklemmt und mit der zu untersuchenden Legirung gefüllt. Nachdem diese mit Hülfe einiger Bunsen'scher Brenner zum Schmelzen gebracht war, wurde die andere, ebenfalls aus Gaskohle bestehende Electrode durch die obere Oeffnung der Röhre eingeführt, sodass sie, gleich der untern, etwa 3 mm tief in die Legirung eintauchte. Die beiden Kohlen waren mit einem Pohl'schen Commutator verbunden, der einerseits mit der Batterie, andererseits mit einem empfindlichen Galvanometer in Verbindung stand. Zwischen Batterie und Commutator war noch eine Tangentenbussole einge-

1) Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 280. 1876.

2) Compt. rend. LIII. p. 727. 1861.

schaltet. Vor Schliessung des Stromes wurden die Kohlen längere Zeit mit dem Galvanometer verbunden, um einen etwa entstandenen Thermostrom beobachten zu können. Die Batterie bestand aus sechs grossen Bunsen'schen Elementen, welche zu zwei grossplattigen Elementen combinirt waren. Der Strom der Batterie durchfloss die Legirung immer so, dass das schwerere Metall sich unten in der Röhre abscheiden musste. Von Zeit zu Zeit wurden die Electroden mit dem Galvanometer verbunden, um einen Polarisationsstrom beobachten zu können. Nachdem die Einwirkung des Stromes 4—6 Stunden gedauert hatte, wurde die Legirung im Strome erkalten gelassen. — Die Ablenkung der Tangentenbussole zeigte einen Strom an, der in einer Stunde etwa 37 g Silber abgeschieden hätte. — Nach dem Erkalten der Röhre wurde der Metallstab herausgenommen, die Enden ungefähr 1 cm lang abgebrochen und analysirt.

Da ich nicht sicher sein konnte, ob die Legirungen beim Schmelzen ohne Strom homogen bleiben oder nicht, so schmolz ich dieselben in einer senkrechten Röhre 4—5 Stunden lang und bestimmte das specifische Gewicht der Enden.

Folgende Tabelle enthält das Resultat dieser Versuche. Die in der Spalte „berechnet“ angegebenen Zahlen sind aus der Zusammensetzung der Legirung und aus den specifischen Gewichten der Elemente berechnet, unter der Voraussetzung, dass beim Zusammenschmelzen keine Volumenänderung eintrete.

	Spec. Gew.	Differenz	Specifisches Gewicht	
	oben		unten	berechnet
Sb ₂ Pb ₃	8,606	1,573	10,179	9,4
Sb ₂ Pb ₅	9,48	0,68	10,16	10,06
Sb Pb ₃	10,12	0,17	10,29	10,23
Sb Ag ₃	9,40	0,00	9,40	9,6
Sb ₂ Cu ₃	8,00	0,05	8,05	7,9
Sb ₂ Zn ₃	6,33	0,01	6,34	6,95
Sb ₄ Sn ₃	6,805	0,005	6,810	6,94
Bi ₂ Pb ₃	10,76	0,00	10,76	10,74

achtet, der möglicherweise davon herrührte, dass das an der Oberfläche der Legirung durch die Berührung mit der Luft entstandene Antimonoxyd durch den Strom wieder zersetzt wurde.

II. Antimonkupfer. Sb_2Cu_3 . Die Legirung wurde ebenso dargestellt wie die vorhergehende. Sie hatte eine schön violette Farbe, war sehr spröde und schmolz ziemlich leicht noch unter der Rothglühhitze.

Nach fünfstündiger Einwirkung des Stromes wurde der Versuch unterbrochen und die Enden des Metallstabes so analysirt, dass die feingepulverte Legirung in Königswasser gelöst, die Metalle mit Schwefelwasserstoff gefällt und das Antimon der Mischung durch Schwefelkalium entzogen und wie vorhin bestimmt wurde. Das zurückbleibende Schwefelkupfer wurde wieder gelöst und als CuO bestimmt.

Anode.

Aus 1,4858 g angew. Subst. wurden erhalten 1,3994 g Sb_2S_5
und 0,8011 g CuO , woraus sich berechnen: $56,81\%$ Sb
und $43,04\%$ „ Cu

zusammen $99,85\%$

Kathode.

Aus 1,6614 g angew. Subst. wurden erhalten 1,5623 g
 Sb_2S_5 und 0,8976 g CuO , woraus sich berechnen $56,80\%$ Sb
und $43,13\%$ „ Cu

zusammen $99,93\%$

Da an beiden Polen dieselben Mengen Antimon, resp. Kupfer gefunden wurden, so war auch diese Legirung nicht zersetzt worden.

III. Antimonsilber. SbAg_3 . Die Legirung ist stahlgrau und schmilzt leicht. Die Einwirkung des Stromes dauerte sechs Stunden. Die Legirung wurde mit Salpetersäure oxydirt, das Silbersalz ausgewaschen und mit Salzsäure gefällt.

Anode.

0,6900 g angewandte Substanz gaben 0,6498 g AgCl, woraus sich 71,0% Silber berechnen.

Kathode.

0,8080 g angewandte Substanz gaben 0,7620 g AgCl, woraus sich 71,0% Silber berechnen.

An beiden Polen befand sich eine gleiche Menge Silber entsprechend der Formel SbAg_3 , wonach keine Zersetzung eingetreten sein konnte.

IV. Antimonzinn. Sb_4Sn_3 . Die Legirung ist grob krystallinisch, beinahe silberweiss und schmilzt sehr leicht. Sie wurde, wie die Analyse zeigt, nicht zersetzt. Diese wurde auf die gewöhnliche Weise durch Schmelzen mit Natronhydrat im Silbertiegel und Trennen der Natriumsalze mit Alkohol ausgeführt.

Anode.

0,6930 g angewandte Substanz gaben 0,5004 g Sb_2O_3 und 0,3682 g SnO_2 , woraus sich berechnen:

57,60%	Sb
und 41,80	„ Sn
zusammen 99,40%	

Kathode.

0,8535 g angewandte Substanz gaben 0,6232 g Sb_2O_3 und 0,4556 g SnO_2 , woraus sich berechnen:

57,25%	Sb
und 41,89	„ Sn
zusammen 99,14%	

V. Wismuthblei. Bi_2Pb_3 . Diese beiden Metalle geben eine wenig spröde, sehr fein krystallinische Legirung, die bei 150° C. schmilzt.

Die beiden Metalle wurden in salpetersaurer Lösung durch Schwefelsäure getrennt.

Anode.

1,9020 g Substanz gaben 0,8943 g Bi_2O_3 , woraus sich 42,2% Bi berechnen.

Kathode.

1,8914 g Substanz gaben 0,8914 g Bi_2O_3 , woraus sich 42,3% Bi berechnen.

An beiden Polen war gleich viel Wismuth, also war keine Zersetzung eingetreten.

Die Auswahl der Legirungen zum Zweck der Untersuchung war auf die hier angeführten beschränkt, weil viele Metalle, besonders Eisen, Nickel, Kobalt und Platin zu schwer schmelzbare Legirungen geben, andere dagegen, wie die Erdmetalle und Alkalimetalle, theils zu schwierig zu beschaffen, theils zu leicht oxydirbar sind. Arsen an Stelle von Antimon gab immer nur sehr schwer oder gar nicht schmelzbare Legirungen, aus welchen das Arsen beim Erhitzen sich verflüchtigte. Magnesium liess sich mit Antimon leicht unter heftigem Erglühen vereinigen, die Legirung war aber sehr schwer schmelzbar. Arsen- und Antimonamalgam sind schwierig darzustellen und verlieren beim Erhitzen Quecksilber.

Die von Obach und mir untersuchten Legirungen sind folgende:

-	+	-	+
Quecksilber	Natrium	Antimon	Kupfer
Natrium	Kalium	„	Silber
Zinn	Blei	„	Zinn
Antimon	Zink	Wismuth	Blei

Keine dieser Legirungen wurde zersetzt. Da Antimon ausser Arsen und Tellur das electronegativste sämmtlicher Halbmetalle ist, so ist wohl kaum zu zweifeln, dass die Legirungen der oben angeführten und wohl überhaupt der positiven Metalle mit den Elementen, die weniger negativ sind als das Antimon, auch nicht zersetzt werden.

Der Uebergang von diesen zusammengesetzten Leitern erster Classe zu denen der zweiten, den Electrolyten, ist nun offenbar kein plötzlicher. Es stehen zwischen beiden Gruppen Stoffe, welche bei niederer Temperatur ohne Zersetzung leiten, bei höherer aber, und zwar zum Theil noch bevor sie schmelzen, wie z. B. das Kupfer- und Silbersulfür, electrolysirt werden. Ebenso verhalten sich noch die Sulfide des Bleis, Nickels, Eisens, Wismuths, Zinns und

Antimons. Diese Körper theilen mit den Leitern zweiter Classe die Eigenthümlichkeit, dass ihre Leitungsfähigkeit mit steigender Temperatur, also mit Steigerung der Beweglichkeit ihrer Theilchen zunimmt.

Dasselbe eigenthümliche Verhalten zeigt eine grössere Anzahl anderer Verbindungen, die bisher noch nicht haben electrolysirt werden können, vermuthlich nur, weil sie zu strengflüssig sind; solche Verbindungen sind das Zinnoxyd, Eisenoxyd und Chromoxyd. Diese gehören daher wahrscheinlich in dieselbe Mittelclasse von Verbindungen, welche den Uebergang von den zusammengesetzten Leitern erster Classe zu den Electrolyten bilden, während die eigentlichen Electrolyte nicht leiten, ohne zersetzt zu werden. Zu letzteren gehören insbesondere die Haloidverbindungen der Metalle, welche im festen Zustande nicht zersetzt werden, weil sie meist Isolatoren sind. Sobald sie beginnen zu leiten, nämlich wenn sie geschmolzen werden, werden sie zersetzt. Auch einige Sauerstoffverbindungen, das Bleioxyd, Antimonoxyd, Wismuthoxyd, die Molybdänsäure, Vanadinsäure und Chromsäure verhalten sich so.

Endlich scheint es noch eine vierte Classe von Verbindungen zu geben, welche überhaupt nicht leiten, weder ohne, noch mit Zersetzung. Sehen wir von dieser letzteren Gruppe ab, deren Eigenthümlichkeit wahrscheinlich mehr auf der Stellung und Verkettungsart, als auf der Natur der Atome beruht, und denken wir uns die Verbindungen, welche ein positives Element mit anderen Elementen zu bilden vermag, nach der Stellung dieser Elemente in der electrochemischen Reihe geordnet, so werden wir, in einer solchen Reihe von der positiven zur negativen Seite fortschreitend, zunächst Leiter erster Classe treffen, dann die Mittelglieder, welche bei niedriger Temperatur metallisch, bei höherer electrolytisch leiten, und endlich am negativen Ende nur Electrolyte.

Es würde für die Charakteristik der Elemente von Werth sein, wenn wir für jedes derselben bestimmen könnten, bei welcher seiner Verbindungen die electroly-

tische Leitungsfähigkeit beginnt. Dies ist bis jetzt erst für einige derselben möglich. Die Verbindungen des Kupfers und Silbers mit Schwefel lassen sich bei relativ niedriger Temperatur zersetzen, ihre Verbindungen mit Antimon und Selen dagegen sind nicht mehr zersetzbar. Es ist wahrscheinlich, dass auch ihre Tellurverbindungen sich wie Leiter erster Classe verhalten. Somit wäre für Silber und Kupfer die electrolytische Grenze beim Schwefel gefunden.

Die Schwefelverbindungen von Zinn, Blei und Zink verhalten sich wie Leiter zweiter Classe; ihre Antimonverbindungen werden nicht mehr zersetzt; die electrolytische Grenze liegt für diese Metalle daher zwischen Schwefel und Antimon.

Die oben erwähnten störenden Eigenschaften mancher Verbindungen, ihre Schwerschmelzbarkeit und freiwillige Zersetzung, erschweren und verhindern leider die Feststellung dieser Grenze für die Verbindungen aller Elemente.

Neues chemisches Hauptlaboratorium der Univ. Tübingen, im Juni 1879.

VI. Ueber die electriche Durchbrechung des Glases; von E. Mach und S. Doubrava.

(Aus dem LXXVIII. Bande der Wien. Ber. II. Abth. Oct.-Heft. Jahrg. 1878; mitgetheilt von den Hrn. Verf.)

1. Hr. Prof. v. Waltenhofen hat einen auf die Durchbrechung des Glases bezüglichen Versuch beschrieben¹⁾, welcher auf den ersten Blick so wunderlich erscheint, dass man geneigt ist, denselben dem berühmten Lullin'schen Versuche an die Seite zu stellen. Der Versuch besteht in Folgendem: Tropft man auf eine dünne

1) Dingler's polytechn. Journ. CLXXIX. p. 435.

Glasplatte einen kreisförmigen Stearinring auf und stellt zu beiden Seiten der Platte in das Centrum des Ringes die Spitzen des Ausladers, so wird die Platte einmal an dem Innenrande des Ringes durchbohrt. Stellt man aber die Spitzen in gleiche Abstände vom Centrum und in denselben Durchmesser, so treten mehrere Durchbohrungen an dem Innenrande des Ringes auf. Eine Erklärung ist der Beschreibung des Experimentes nicht beigefügt. Wir wollen in dem Folgenden den Sachverhalt genauer untersuchen, wobei sich die Erklärung grösstentheils von selbst ergeben wird.

2. Stellt man eine Glasplatte ohne Stearinring zwischen die Ausladerspitzen, so geht die Entladung bei kleineren Platten um den Rand und erfolgt bei grösseren gewöhnlich gar nicht in Form eines Funkens. Bringt man einen Stearinring mit einer Lücke auf die Platte, so geht die Entladung durch diese Lücke um den Rand. Zuweilen wird durch den Flaschenfunken der Ring an einer Stelle aufgesprengt, und dann geht die Entladung wieder über den Rand. Man erkennt hieraus, dass der Stearinring für die Entladung ein Hinderniss bildet, und dass die Stearinluftfläche besser isolirt, wie die Glasluftfläche. Dies zeigt sich auch durch den messenden Versuch. Wir stellen ein Funkenmikrometer auf 4 cm Schlagweite und erhalten dann durch dasselbe die Entladung einer Flasche

bei 10—11 Maassflaschenentladungen in der freien Luft,			
" 8—9	"	"	an einer Glasfläche,
" 10—10,5	"	"	an einer Stearinfläche.

Die Schlagweite ist also bei gleicher Ladung auf Glas grösser als auf Stearin, auf Stearin etwa so gross wie in der freien Luft. Die Glasfläche ist also der Stearinfläche gegenüber als relativ leitend zu betrachten.

3. Die angeführten Thatsachen genügen zum Verständnisse gewisser Eigenthümlichkeiten des Versuches.

Die Durchbrechung kann nicht an den Ausladerspitzen stattfinden, denn bevor diese die nöthige electricische Dichte erlangt haben, findet schon das Ausströmen auf die halbleitende Gasfläche statt. Ist die Platte klein, so geht die Entladung über den Rand. Bei genügender Grösse der Platte kann aber eine solche Ausbreitung zu Stande kommen, dass die zur Funkenentladung nöthige Spannung überhaupt nicht mehr vorhanden ist. Grenzt der Stearinring einen Theil der Gasfläche ab, so ladet sich dieser wie eine Franklin'sche Tafel, und die Durchbrechung findet naturgemäss am Rande, als dem Orte der grössten Dichte, statt.

In der That wird der Ausfall des Versuches nicht wesentlich verändert, wenn man die vom Stearinringe eingeschlossene Glasfläche mit Stanniol belegt. Auch hier findet die Durchbrechung, je nach den Versuchsumständen einfach oder mehrfach, am Rande statt.

Bei sternförmiger Stanniolbelegung findet die Durchbrechung meist an mehreren Sternspitzen zugleich, mitunter nur an einer Spitze, zuweilen aber auch an einer andern Stelle, aber immer am Rande statt. An eine vollkommene Regelmässigkeit der Erscheinung darf man bei einer so stürmischen Ladung (zumal bei einem Halbleiter) und bei der Ungleichmässigkeit des Glases nicht denken. Auch eine Art Stauung am Innenrande des Stearinringes könnte stattfinden, denn die Erscheinung ist nicht statischer, sondern dynamischer Natur.

4. Man kann nun den Versuch in verschiedener Weise modificiren. Wir ziehen ein Stearinband quer über eine Glasplatte und zwar über beide Seiten derselben. Die Ausladerspitzen stellen wir auf beide Seiten der Platte und auf verschiedene Seiten des Bandes. Auch jetzt findet oft die Durchbrechung meist hart am Bande statt.

Wir bringen auf der einen Seite der Platte einen Stearinring an und auf der andern Seite ebenfalls einen mit ersterem nicht concentrischen, sondern denselben schneidenden Stearinring. In das Centrum eines jeden

Ringes stellen wir die Ausladerspitzen. Die Durchbrechung findet nun nur an einem der beiden Durchschnittspunkte der Innenränder der Ringe statt. Berühren sich die Innenränder bloß, so ist der Berührungspunkt zugleich der Durchbohrungspunkt.

Gleiche Dienste wie Stearin leisten bei dem Versuche Wachs und Paraffin. Es wurde auch beobachtet, dass nach dem Abkratzen des Stearinringes die Fläche, auf welcher er aufgesessen hatte, zuweilen noch so wirkte, wie der Ring selbst.

6. Am schwierigsten ist es, zu erklären, warum bei centrischer Stellung der Spitzen die einfache, bei excentrischer symmetrischer die mehrfache Durchbrechung eintritt. Wir haben uns zunächst überzeugt, dass dieses Verhalten nicht vollkommen regelmässig ist. Es kann, wenn auch selten, auch bei centrischer Stellung eine mehrfache, bei excentrischer Stellung eine einfache Durchbrechung stattfinden. Einen sehr zwingenden Grund für die Regel wird man also nicht erwarten dürfen.

Man kann nicht bloß das Endergebniss, sondern auch den Verlauf der Erscheinung auf mehrfache Weise beobachten. Wir nehmen eine mit Schellack überzogene blaue Glastafel, an welcher beiderseits bloß ein kreisförmiger Fleck vom Ueberzuge frei gelassen wird. Diese Kreisflächen kann man durch Einreiben mit Chlorcalcium feucht halten. Die Spitzen des Ausladers bringen wir in die bekannte centrische oder excentrisch symmetrische Stellung und verbinden sie mit den Belegungen einer Flasche. Wenn wir die Flasche durch einen Handauslader entladen, so entladen sich gleichzeitig die Gasflächen durch die Spitzen in Form ästiger Funken in die Flasche. Den verzweigten Funken der Vorderfläche sehen wir roth, jenen der Hinterfläche durch das blaue Glas blau hindurch. Den negativen Entladungsfunken achten wir einem positiven Ladungsfunken gleich. Bei centrischer Stellung entsprechen nun allen stärkeren Aesten der einen Seite Funkenäste der andern Seite. Die Durchbrechungsstelle

ist wahrscheinlich der Durchschnittspunkt des stärksten Astes mit der Kreisperipherie. Bei excentrischer Stellung entsprechen sich die beiderseitigen Aeste nicht mehr vollständig. Es finden mehrfache Durchschnitte statt. Immer geht aber ein starker Ast des negativen Ladungsfunkens zu jener Stelle, von welcher auf der gegenüberliegenden Seite der positive Ladungsfunke ausgeht, und verzweigt sich von hier diesem entsprechend. In dieser grössern Unregelmässigkeit dürfte der Grund der mehrfachen Durchbrechung liegen.

Berusst man die Kreisflächen der Glastafel, so kann man, da die Funkenäste deutliche Spuren zurücklassen, das besprochene Verhalten in aller Ruhe constatiren. Auch bei langsamer Ladung der Glasflächen durch Büschel geht ein Theil des negativen Büschels zur Ausgangsstelle des positiven. Die positive Electrode scheint bei der Entladung den Ton anzugeben, oder, wenn man will, einen Vorsprung zu haben. Die eigenthümlichen Versuche, zu welchen uns die Beachtung dieses Umstandes geführt hat, behalten wir einer nächsten Mittheilung vor.

VII. *Ueber die electriche Durchbohrung des Glases; von A. v. Waltenhofen in Prag.*

(Aus dem LXXIX. Bande der Wien. Ber. II. Abth. Märzheft. Jahrg. 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Bei Gelegenheit meiner auf die Umkehrung des Lullin'schen Experimentes bezüglichen Versuche (1866) habe ich einen merkwürdigen Fall der electriche Durchbohrung des Glases beobachtet und beschrieben, welcher in Folgendem besteht.

Bringt man eine dünne Glasplatte *P* (Fig. 1), auf welcher ein einige Centimeter weiter Ring *a* aus Stearin

aufgetropft ist, so zwischen die mit den beiden Belegungen (+ und -) einer Leydener Batterie verbundenen Spitzen S_1 und S_2 , dass diese Spitzen einander irgendwo innerhalb des Ringes gerade gegenüber stehen, so erfolgt bei der Entladung eine einfache Durchbohrung am innern Rande

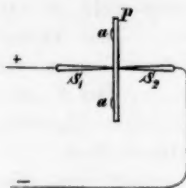


Fig. 1.



Fig. 2.

des Stearinringes, z. B. bei b . — Stellt man jedoch die Spitzen S_1 und S_2 (Fig. 2) beiderseits und gleich weit vom Centrum so auf einen Durchmesser der Ringfläche, dass sie einander in einem Abstände von 1 bis 3 cm parallel sind, so erfolgen bei der Entladung gleichzeitig mehrere Durchbohrungen, jedoch immer am innern Rande des Ringes.

Die Zahl der Durchbohrungen hängt von der Distanz der Spitzen im Verhältnisse zum Ringdurchmesser und vor allem vom mechanischen Aequivalente der Entladung ab.¹⁾

Die Beachtung, welche diesem Versuche in jüngster Zeit zu Theil geworden ist²⁾, hat mich veranlasst, denselben mit einigen Modificationen zu wiederholen, und ich habe dabei folgende Thatsachen, die mir bemerkenswerth scheinen, beobachtet.

1) Bei starken Entladungen habe ich stets mehrere und wiederholt sogar 15 gleichzeitige Durchbohrungen beobachtet. Einfache Durchbohrungen sind mir bei der Fig. 2 dargestellten Spitzenstellung nur bei Anwendung schwacher Entladungen ausnahmsweise vorgekommen.

2) Siehe die vorstehende Abhandlung.

1) Bringt man auf eine dünne Glasplatte¹⁾ einen Tropfen Stearin und hält sie zwischen die einige Centimeter voneinander entfernten kugelförmigen Electroden einer Holtz'schen oder auch einer gewöhnlichen Electrisirmaschine, so erfolgt entweder sogleich oder nach mehrmaligem Ueberschlagen um den Rand der Glasplatte eine Durchbohrung des Glases am Stearintropfen, falls derselbe nicht zu nahe am Rande der Glasplatte sich befindet. Das kleinste Tröpfchen Stearin kann auf diese Art dazu dienen, eine beliebige Durchbohrungsstelle vorzuzeichnen. Der Versuch gelingt auch im Funkenstrom der Holtz'schen Maschine, wenn man dieselbe ohne Condensator wirken lässt.

2) Die electriche Durchbohrung gelingt auffallend leichter, wenn die mit Stearin betropfte Seite der Glasplatte der positiven Electrode gegenüber steht.²⁾

3) Hängt man eine Glasplatte bifilar an Fäden von je $\frac{1}{2}$ m bis 1 m Länge³⁾ zwischen den einige Centimeter voneinander entfernten kugelförmigen Electroden einer Holtz'schen Maschine in der Art auf, dass die Verbindungslinie der Electroden die Mitte der Platte senkrecht trifft, so wird die Platte durch die Entladung der Maschine von der positiven gegen die negative Electrode hingetrieben.⁴⁾

1) Die bei den hier beschriebenen Versuchen benutzten Glasplatten waren 16 cm im Quadrat und 1 bis 2 mm dick.

2) Gibt man jedoch der Stearinbedeckung eine grössere Ausdehnung (z. B. durch Auftragen mehrerer Tropfen, welche ineinander überfliessen), so wird dieser Unterschied unmerklich. Dies ist z. B. bei dem unter 4) beschriebenen Versuche der Fall.

3) Ich habe diese je $\frac{3}{4}$ m langen Fäden an zwei einer Quadratseite entsprechenden Ecken der Glasplatte mit Siegellack aufgeklebt und parallel, oder besser nach oben divergirend, an einem von einem passenden Stativ getragenen horizontalen Stäbchen befestigt. Der Versuch erfordert eine kräftig wirkende Maschine, welche nicht mit dem Uebelstande des „freiwilligen Polwechsels“ (bei erschwerter Entladung) behaftet ist. Die von mir benutzte ist eine von E. Borchardt in Hannover (1874) gelieferte einfache Holtz'sche Maschine mit einer Maximalschlagweite von beinahe 24 cm.

4) Im ersten Augenblicke der beginnenden Thätigkeit der Maschine erfolgt häufig ein merklicher Ausschlag gegen die positive

Am besten lässt sich diese Erscheinung beobachten, wenn man (durch Entfernung der Condensatoren) eine büschelförmige Entladung einleitet, da diese ruhiger vor sich geht, als wenn man Funken überschlagen lässt.

4) Bedeckt man die Platte auf einer Seite mit Stearin (z. B. durch Auftropfen eines centralen Fleckes von einigen Centimetern im Durchmesser) und wiederholt den soeben beschriebenen Versuch, so tritt die Abstossung gegen die negative Electrode hin stärker auf als vorher, wenn die bedeckte Seite der positiven, nicht aber, wenn sie der negativen Electrode zugewendet ist. In beiden Fällen tritt aber (auch wenn die Entladung eine büschelförmige ist) in der Regel sehr bald eine Durchbohrung des Glases an der bedeckten Fläche ein.¹⁾

Das unter 1) beschriebene Experiment ist wohl das einfachste Verfahren der electricischen Durchbohrung des Glases und macht alle zur Ausführung dieses Vorlesungsversuches bisher angewendeten Vorrichtungen und mehr oder weniger umständlichen Vorbereitungen²⁾ entbehrlich. Es erfordert nicht einmal eine sehr kräftige Maschine, wie aus der Thatsache hervorgeht, dass die Durchbohrung einer 2 mm dicken Glasplatte noch gelang, als die Funkenstrecke einer 20zölligen Winter'schen Reibungsmaschine bis auf 2,5 cm verkürzt wurde. Gleichwohl würde man

Electrode hin, der aber alsbald in eine fortdauernde Abstossung gegen die negative Electrode übergeht, bis endlich (infolge der Entladungen um den Rand der Platte) starke und unregelmässige Schwankungen die Erscheinung stören. Bemerkenswerth sind die Transversalschwankungen beim Ueberschlagen um die verticalen Ränder.

1) Vgl. die Anmerkung ad 2.

2) Hierher gehört die Isolirung der beiderseits an die Platte geführten Spitzen durch Umkleben mit Wachs, durch Ueberziehen mit Guttapercha- oder Glashülsen, durch Umgebung mit schlecht leitenden Flüssigkeiten u. dergl.; Kunstgriffe, die allerdings zur Durchbohrung dicker Platten erforderlich sind, bisher aber auch bei ganz dünnen Platten nöthig waren, selbst bei Anwendung von Ansammlungsapparaten. (Vgl. z. B. Frick, physikalische Technik, neueste Auflage.)

daraus nicht folgern dürfen, dass derselbe Versuch bei gleicher Schlagweite auch mit einer kleineren Maschine gelingen müsste, weil die potentielle Energie der Ladung des Conductors bekanntlich nicht nur vom Betrage der Potentialfunction, sondern auch von der Quantität der Ladung abhängt.

Wichtiger als der beschriebene Versuch an sich ist die dabei gemachte und unter 2) angeführte Beobachtung hinsichtlich des Einflusses der Richtung der Entladung auf den leichtern oder schwereren Durchgang derselben durch die einseitig bedeckte Platte; und insofern gehört dieser Versuch in die Kategorie der mit dem Lullin'schen Versuche verwandten Experimente.

Ähnliches gilt auch von den unter 3) und 4) beschriebenen Versuchen, auf welche ich später zurückkommen werde.

Von einer eigentlichen Erklärung der hierher gehörigen höchst merkwürdigen Erscheinungen kann bei der Unbestimmtheit und Unsicherheit unserer bis jetzt möglichen Vorstellungen von dem Wesen der Electricität wohl kaum die Rede sein.

In der That sind auch die sehr sinnreichen Erklärungen, welche z. B. Riess von den Lichtenberg'schen Figuren und vom Lullin'schen Versuche gegeben hat, keineswegs einwurfsfrei.

Hinsichtlich der Lichtenberg'schen Figuren habe ich schon in meiner diesbezüglichen Abhandlung vom Jahre 1866¹⁾ mich zu der Ansicht bekannt, dass das von Reitlinger aufgestellte Erklärungsprincip²⁾ das wahrscheinlichere sei.

Bei der Erklärung des Lullin'schen Versuches habe ich damals noch die Riess'sche Annahme von einer hydroelectrischen Oberflächenerregung vertreten, weil ich gefunden zu haben glaubte, dass die Substanzen, welche bei

1) Pogg. Ann. CXXVIII. p. 589. 1866.

2) In der von mir angedeuteten Modification, von welcher später die Rede sein wird.

den Faraday'schen Versuchen ein hydroelectrisch positives Verhalten zeigten, auch diejenigen seien, mit welchen die Umkehrung des Lullin'schen Experimentes in der Regel gelingt.

Obgleich meine damals beschriebenen Versuche mit Erfolg wiederholt worden sind, so bin ich doch späterhin immer mehr zur Ueberzeugung gekommen, dass das Gelingen derselben unsicher, und dass die vermuthete Identität der zur Umkehrung des Lullin'schen Versuches am besten geeigneten Substanzen mit den sogenannten hydroelectrisch positiven noch sehr zweifelhaft ist, und demnach die ohnedies nicht sehr ungezwungene Zurückführung auf eine hydroelectrische Erregung der Oberfläche auch bei der Erklärung des Lullin'schen Phänomens unhaltbar erscheint.

Aus diesem Grunde unterlasse ich denn auch die sonst sehr naheliegende Anwendung des Riess'schen Erklärungsprincipes auf den in dieser Mittheilung besprochenen Fall.

Ein Anhaltspunkt zu einer Erklärung desselben scheint mir in einer Bemerkung zu liegen, die ich schon bei der Veröffentlichung meines Experimentes mit dem Stearinringe bei der vorausgehenden Besprechung eines andern Versuches gemacht habe. In jener Notiz über die „mechanischen Wirkungen der Electricität“¹⁾ habe ich nämlich (l. c. p. 435) die aus den angeführten Thatsachen gefolgerte Annahme ausgesprochen, dass durch Stearin (ohne eine hydroelectrische Erregung) die Ausbreitung der positiven sowohl als auch der negativen Electricität „mehr gehemmt ist“ als durch Glas.²⁾

1) Dingler's polytechn. Journ. CLXXIX. p. 432. 1866. (Die am Schlusse der soeben citirten Notiz ausgesprochene Ansicht in Betreff der Lichtenberg'schen Figuren, zu der mich eine bei Anwendung eines Electrophors aus Guajac-Harz beobachtete Anomalie veranlasst hatte, habe ich Pogg. Ann. CXXVIII. p. 606. 1866 berichtet.)

2) Diese Annahme ist ganz im Einklange mit der Erklärung meines Ringexperimentes in der oben citirten Abhandlung von E. Mach

Diese Annahme in Verbindung mit einer andern, die sogleich näher erörtert werden soll, lässt die von mir beobachtete Thatsache, um deren Erklärung es sich hier hauptsächlich handelt (Versuch 2), als eine naheliegende Folgerung erscheinen.

Bekanntlich hat schon Plücker in einer seiner Abhandlungen über die electriche Entladung in gasverdünnten Räumen¹⁾ die Ansicht ausgesprochen, „dass eine electriche Strömung, von der positiven Electrode ausgehend, die negative Electrode wirklich erreicht.“ — „Ebenso zuversichtlich“, sagt Plücker weiterhin, „können wir wohl annehmen, dass nur ponderable Materie es ist, die, von dem electricen Strome ergriffen, das Leuchten desselben hervorbringt“.

Von diesen Grundansichten hat Reitlinger bei der Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren²⁾ Gebrauch gemacht, indem er sie in der Form ausspricht, „dass auf jedes Theilchen des positiven Lichtes eine Kraftcomponente in der Richtung des positiven Stromes wirke, während eine solche Componente im negativen Lichte nicht wirksam ist“. — „Indem ich nun“, sagt Reitlinger, „diese Kraftcomponente den electrometrischen Abstossungen der electricen Theilchen an der positiven und negativen Spitze bei der positiven Spitze hinzufügte, so ergaben sich mit Leichtigkeit jene Bewegungsunterschiede, die mich die Thatsachen gelehrt hatten“.

Ich habe mich der Reitlinger'schen Erklärung der Lichtenberg'schen Figuren im Princip angeschlossen, jedoch schon damals³⁾ die weitergehende Vorstellung mir gebildet,

und S. Doubrava, welche zugleich angibt, wodurch jene vermehrte „Hemmung“ der Electricität auf Stearin im Vergleiche mit Glas verursacht wird, nämlich durch die verschiedene Beschaffenheit der Luftschichten auf beiden Materialien.

1) Pogg. Ann. CVII. p. 89. 1859.

2) Wien. Ber. XLIII. p. 543. 1861.

3) Pogg. Ann. CXXVIII. p. 608. 1866.

dass man sich die ponderable Materie zwischen den Electroden nicht nur als Träger der Entladung, sondern als durch dieselbe selbst in Bewegung gesetzt zu denken habe, und dass eben „in der Verschiedenheit dieser Bewegungen¹⁾ die Ursache der charakteristischen Formverschiedenheit der den beiden Electricitäten entsprechenden Staubfiguren zu suchen sei“. — Ich habe angenommen, dass die als ponderable Träger der Entladung dienenden „electrisirten“ Theilchen, wie ich sie im Gegensatze zu den bewegten Electricitäten selbst nannte (nämlich die Luftmolecüle und von den Electroden losgerissene Metalltheilchen), an den Electroden gewisse Geschwindigkeiten empfangen, und zwar grössere an der positiven als an der negativen, für welche Annahme mir namentlich die bekannte Thatsache zu sprechen schien²⁾, dass die negative Electrode (eines Funkeninductors) eine höhere Temperatur zeigt.

Die Möglichkeit, ja sogar Wahrscheinlichkeit einer solchen Mitbewegung ponderabler Theilchen ist ferner (gleichfalls mit Hinweisung auf Plücker's Annahme, sowie auch auf Reitlinger's und meine diesbezüglichen Publicationen) auch von G. Wiedemann anerkannt worden, indem er über Gasentladungen³⁾ sagt: „mithin muss die Bewegung der Electricität selbst oder der mit Electricität geladenen Gastheilchen von der Electrode fort mit grösserer Anfangsgeschwindigkeit vor sich gehen, wenn die Electrode positiv, als wenn sie negativ ist“, — nachdem im Vorhergehenden, wo von den Electroden im all-

1) Es ist hier (l. c.) ausdrücklich von den Bewegungen der „electrisirten“ Theilchen die Rede, womit ich unzweideutig ersichtlich machen wollte, dass ich Theilchen der ponderablen stromleitenden Materie selbst, nicht aber Quantitätselemente eines electrischen Agens meine. Die zweideutigen und unbestimmten Bezeichnungen „electrisches Theilchen“ oder „Theilchen des positiven Lichtes“ habe ich deshalb absichtlich vermieden.

2) Anmerkung am Schlusse der citirten Abhandlung.

3) „Die Lehre vom Galvanismus und Electromagnetismus“, 2. Aufl. Bd. II. Abth. 2. p. 298 u. 299.

gemeinen die Rede ist, die Ansicht als wahrscheinlich hingestellt wurde: „es könnten endlich die von der Electrode fortgetriebenen Gastheilchen mit der in ihnen enthaltenen Electricität durch das umgebende Medium auf grössere Entfernungen mit einer so grossen Geschwindigkeit, dass dieselbe einer bis zum Leuchten gesteigerten Temperaturerhöhung der Gasmoleculé entspräche, fortgeschleudert werden“.

Die in dem letztern Satze mit angeregte Frage, ob die Geschwindigkeiten, mit welchen die Gastheilchen von der Electrode fortgeschleudert werden, mit jenen Moleculargeschwindigkeiten von gleicher Ordnung sind, welche im Sinne der mechanischen Wärmetheorie bei so hohen Temperaturen angenommen werden müssen, will ich vorderhand unerörtert lassen; der Sinn meiner wiederholt ausgesprochenen Ansicht ist im allgemeinen nur der, dass die Luftmoleculé in der Funkenstrecke (deren Bewegungen man sich, da sie mit Lichtentwicklung verbunden sind, jedenfalls als höchst energische denken muss) mit einer Geschwindigkeitscomponente in der Richtung von der positiven zur negativen Electrode hin behaftet sind, was man auch kurz als eine Ueberführung von Luftmoleculén in der Richtung des Stromes bezeichnen könnte.

In der That scheinen die unter 3) und 4) beschriebenen Versuche diese Hypothese zu bestätigen.

Verbindet man dieselbe mit der vorhin constatirten (insbesondere auch durch den Versuch 4) bestätigten) That- sache, dass sich eine electriche Entladung auf einer Stearinfläche schwerer als auf einer Glasplatte ausbreitet¹⁾, so wird die unter 2) angeführte Beobachtung wohl begreiflich. Der besagte Einfluss der Stearinbedeckung muss sich nämlich gegenüber der von der positiven Electrode

1) Vielleicht wohl infolge einer verschiedenen Oberflächencondensation, d. h. infolge einer verschiedenen Beschaffenheit der an der Glas- und Stearinoberfläche adhären den Luftschichten, wie in der oben citirten Abhandlung von E. Mach und S. Doubrava angedeutet ist.

ausgehenden Entladung in höherem Grade als gegenüber der negativen geltend machen, wenn wir den Luftmoleculen in der Funkenstrecke eine Geschwindigkeitscomponente in der Richtung des Stromes zuschreiben.

Die Durchbohrung des Glases ist eben eine mechanische Arbeit¹⁾, welche auf Kosten der lebendigen Kraft der an die durchbohrte Stelle anprallenden Luftmoleculé stattfindet, und dieser Umsatz von Energie wird offenbar desto leichter herbeigeführt werden, je energischer die Molecularbewegungen sind, welche, wenn sie einem Hindernisse²⁾ begegnen, daselbst plötzlich gehemmt werden.³⁾

1) Bemerkenswerth ist dabei die äusserste Feinheit mancher Durchbohrungen, wie ich sie namentlich bei Anwendung büschelförmiger Entladungen ohne Condensation mitunter erhalten habe. Es lassen sich solche auch sehr nahe am Rande einer Glasspalte (folglich auch auf sehr kleinen Glasplatten) noch hervorrufen. Eine mikroskopische Messung einer solchen Bohrung ergab eine Weite derselben von etwa 0,04 mm. Die von der Bohrung nach allen Richtungen ausgehenden (geschwärzten) feinen Risse bildeten einen Hof von etwa zehnfachem Durchmesser.

2) Als solches macht sich zunächst die erschwerte Ausbreitung auf der Stearinfläche geltend. Siehe die vorletzte Anmerkung.

3) Nachdem ich die vorstehende Darstellung der hier angeführten Versuche bereits niedergeschrieben hatte, theilte ich den unter 3) beschriebenen Versuch Hrn. Prof. E. Mach mit, mit der Frage um seine Ansicht darüber. Hr. Prof. Mach entgegnete mir hierauf, dass er denselben Versuch auch schon einmal angestellt habe, ohne jedoch eine bestimmte Gesetzmässigkeit hinsichtlich der Bewegungsrichtung der Platte constatiren zu können. Nachdem ich aber bei der Wiederholung des Experimentes (freilich nur wenn die Maschine kräftig wirkte) die Bewegung gegen die negative Electrode hin neuerdings unverkennbar bestätigt gefunden habe, glaube ich, die vorstehende Darstellung dennoch unverändert mittheilen zu sollen. Mehrfache Wiederholungen und Modificationen dieses vielleicht sehr wichtigen Experimentes, welche hiedurch angeregt werden mögen, werden am besten zur genaueren Kenntniss der Bedingungen führen, welche für den Erfolg in dem einen oder in dem andern Sinne massgebend sind, und die Deutung der von mir beobachteten Erscheinung bestätigen oder widerlegen.

VIII. *Ueber die Bewegung von Platten zwischen den Electroden der Holtz'schen Maschine;*
von S. Doubrava.

(Aus dem LXXX. Bande der Wien. Ber. II. Abth. Juniheft. Jahrg. 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

1. Hr. Prof. v. Waltenhofen¹⁾ hat kürzlich ein Experiment beschrieben, aus dem er wichtige Konsequenzen gezogen hat, welches im wesentlichen folgendermassen angestellt wird. Man hängt in der Mitte zwischen den beiden Electroden der Holtz'schen Maschine eine Glas-tafel bifilar auf und stellt dieselbe mit ihrer Ebene senkrecht zur Entladungsrichtung. Bei Erregung der Maschine wird die Tafel gegen den negativen Pol getrieben.

2. Man überzeugt sich nun bald, dass dieser Versuch nur dann gelingt, wenn die Electroden hinreichend weit voneinander entfernt sind, in welchem Falle die Maschine eine knisternde Büschelentladung gibt. Im Dunkeln sieht man dann ein langes, positives Büschel und mehrere pinselförmige negative. Bei Zwischenstellung einer Glas-, Glimmer- oder Ebonitplatte sieht man, dass das positive Büschel an die Platte anprallt und sich auf derselben ausbreitet, dass hingegen das negative die Platte nicht erreicht. Bei meinen Versuchen habe ich gewöhnlich eine Ebonitplatte verwendet, weil diese die Erscheinung besser zeigt, als Glas oder Glimmer. Beim Experiment verfuhr ich in folgender Art. Zwischen die weit getrennten Electroden der Holtz'schen Maschine hängt man die Platte, während die Conductorenkämme noch durch einen besondern Querdraht verbunden sind. Nach der Erregung der Maschine entfernt man den Querdraht, und nun wird die Platte gegen den negativen Pol getrieben.

Um die Platte auf ihren electrischen Zustand während

1) S. die vorstehende Abhandlung.

der Procedur untersuchen zu können, wurde sie, an einem Glasstabe befestigt, zwischen die Electroden gestellt und nach Einleitung der Büschel an einem Goldblattelektroskop geprüft. Die Platte zeigte sich auf beiden Seiten positiv. Stört man die Symmetrie des Ausladerapparates, indem man als Electroden eine Spitze und eine Kugel anwendet, so wird die bewegliche Platte stets gegen die Kugel getrieben (eine Ebonitplatte bleibt sogar an letzterer haften) und zeigt eine Ladung vom Zeichen der Spitze.

Eine weitere Modification des Experimentes, welche ich vornahm, ergab Folgendes:

Die Glasplatte wurde durch ein Paar gegen die Entladungsrichtung senkrechter Glimmerblätter ersetzt, die einen Abstand von einigen Centimetern hatten, durch ein Glasstäbchen fest verbunden und zwischen den Electroden aufgehängt waren. Beide Büschel konnten je ein Glimmerblatt erreichen. Nun zeigte sich gar keine oder eine oscillirende Bewegung der Glimmerblätter, und jedes Glimmerblatt nahm die Ladung der nähern Electrode an.

Die sämtlichen beschriebenen Experimente werden nicht wesentlich geändert, wenn eine Electrode zur Erde abgeleitet wird. Auch der Anblick der Erscheinung im Dunkeln bleibt derselbe.

Sämtliche Versuche führen zu der Ueberzeugung, dass der Bewegungserscheinung der Platte eine Ladungserscheinung als Bedingung vorausgeht, wie dies auch Prof. Mach von vornherein vermuthet hat. Ist diese Ansicht richtig, so müssen dieselben Versuche bei einiger Vorsicht auch mit einer Metallplatte gelingen, was sich auch wirklich bestätigt.

Zum Zwecke der electroskopischen Untersuchung wurde die Metallplatte zwischen den Electroden durch eine Glasröhre, die einen Draht enthielt, mit dem Electroskop hinter einem grossen, zur Erde abgeleiteten Schirme verbunden. Das Electroskop zeigte bei dem Versuche stets eine positive Ladung an. Wurde hingegen die Platte vor dem

Versuche geladen, so trat die Verschiebung gegen den Pol von entgegengesetzter Ladung ein.¹⁾

Man muss also bei diesen Versuchen nicht an etwaige neue Differenzen der positiven und negativen Electroden denken, sondern die Bewegungsphänomene erklären sich ungezwungen aus der bekannten grössern Länge des positiven Büschels, welche übrigens selbstverständlich eine Thatsache von fundamentaler Wichtigkeit ist. Einen tiefern Einblick in das Wesen der electrischen Erscheinungen kann aber dieser Versuch wohl nicht vermitteln.

3. Durch das Gesagte soll jedoch nicht behauptet werden, dass die Entladung an den beiden Electroden nicht eigenthümliche Differenzen darbieten kann. Man erhält eine solche z. B. unter folgenden Umständen:

Eine Ebonitplatte wird in der Mitte zwischen den Electroden der Holtz'schen Maschine aufgehängt. Die beiden Pole der Maschine werden mit je einer innern Belegung einer Flasche verbunden, deren äussere Belegungen untereinander communiciren. Zwischen die beiden inneren Belegungen wird noch, um die Ueberladung der Flaschen zu verhindern, ein Auslader eingeschaltet. Bei Erregung der Maschine geben nun die Electroden vor der Platte eine dunkle Entladung, welche durch die Flaschen in regelmässigem Gange erhalten wird. Auch jetzt zeigt die Platte einen Ausschlag, aber gegen die positive Electrode hin. Noch auffallender war die Erscheinung bei Anwendung einer Metallplatte; dieselbe zeigte einen fast constanten Ausschlag. Spitzenelectroden, an die Stelle der Kugelelectroden gesetzt, zeigten dieselbe Erscheinung. Bei Anwendung von Spitzenelectroden konnten auch die Flaschen ohne Aenderung des Resultates

1) Um das Anprallen des positiven Büschels an die Metallplatte zu verhindern, wurde zwischen dieselbe und die positive Electrode eine zweite fixe Metallplatte gestellt. Trotzdem blieb die Erscheinung ungeändert. Als die fixe Platte zur Erde abgeleitet wurde, hörten auch die Verschiebungen der beweglichen Platte auf.

ausgeschaltet werden. Am Electroskop erwies sich in allen diesen Fällen die Platte als negativ.

Auch bei diesem Vorgange sind Luftströmungen nicht im Spiel. Legt man nämlich eine Metallplatte zwischen zwei gleich dicke Holzplatten und bringt das Ganze zwischen die Ausladerspitzen, sodass dieselben das Holz berühren, so wird auch jetzt bei Erregung der Maschine die Metallplatte negativ geladen.

Weitere Experimente, welche hoffentlich zur Klärung der hier berührten Fragen beitragen werden, sollen später folgen.

IX. Ueber die Beziehungen zwischen dem galvanischen Widerstande und der specifischen Wärme; von Felix Auerbach.

Im Jahre 1858 machte Clausius, gestützt auf die Beobachtungen von Matthiessen¹⁾ und Arndtsen²⁾ über den Einfluss der Temperatur auf den galvanischen Widerstand der Metalle, die Bemerkung, dass die Abhängigkeit des Leitungswiderstandes von der Temperatur für die festen, einfachen Metalle mit einer gewissen Annäherung durch den Satz sich ausdrücken lasse, dass der Widerstand der absoluten Temperatur proportional sei.³⁾ Der Mittelwerth der Coëfficienten der Temperatur T in dem Ausdrucke des Widerstandes ist nämlich bei Arndtsen 0,00366, also gerade so gross wie der thermische Ausdehnungscoëfficient der Gase, und die verschiedenen Coëfficienten schwanken nur zwischen den Grenzen 0,00327 und 0,00413. Es ist hier freilich die Bemerkung zu machen, dass das Eisen, streng genommen nicht, wie oben ge-

1) Pogg. Ann. C. p. 178. 1857.

2) Pogg. Ann. CIV. p. 1. 1858.

3) Pogg. Ann. CIV. p. 650. 1858.

schehen ist, zur Bildung des Mittelwerthes mit benutzt werden darf, weil bei ihm, wie ich gezeigt habe¹⁾, infolge seiner starken Magnetisirbarkeit der Temperaturcoefficient des Widerstandes aussergewöhnlich gross sein muss. Schliesst man das Eisen aus, so findet man den etwas kleinern Mittelwerth 0,00354. Was die Zahlen von Matthiessen betrifft, so genügt es hier, wegen des hinzukommenden Gliedes mit T^2 , nicht, die Coefficienten von T zu betrachten. Man muss vielmehr die Abnahme der Leitungsfähigkeit zwischen 0° und 100° berechnen, welche sich im Mittel aus zehn Zahlen zu $\delta = 0,29307$ pro Einheit der Leitungsfähigkeit bei 0° C. ergibt, und hieraus die entsprechende Zunahme des Widerstandes zwischen denselben Grenzen $\frac{\delta}{1-\delta} = 0,415$ ableiten. Als Zunahme des Widerstandes für 1° C. ergibt sich somit die gegenüber dem Ausdehnungscoefficienten der Gase bedeutend grössere Zahl 0,00415.

Immerhin ist die hier vorliegende Beziehung einerseits zweifellos, andererseits interessant genug, um als Ausgangspunkt theoretischer Betrachtungen dienen zu können. Es sind mir jedoch solche nicht bekannt geworden, und auch Clausius selbst wiederholt neuerdings seine damaligen Bemerkungen.²⁾

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, der besprochenen Beziehung und den Abweichungen von ihrer genauen Gültigkeit einen mathematischen Ausdruck zu geben. Wir wollen uns in einem Raume, dessen Temperatur T_0 durch Zufuhr endlicher Wärmemengen nicht um endliche Grössen geändert wird, einen Stromkreis vorstellen, welcher aus einer Batterie von der electromotorischen Kraft E und einem zu vernachlässigenden Widerstande, sowie aus einem Drahte aus einem einfachen Metalle von dem Querschnitte q , der Länge l , der Masse μ , der specifischen Wärme s , dem specifischen Ausstrah-

1) Wied. Ann. V. p. 289. 1878.

2) Die mechanische Wärmetheorie. Bd. II. p. 150. 1879.

lungsvermögen h und dem specifischen galvanischen Widerstande w besteht. t bedeutet die Zeit, T die Temperatur nach Celsius' Scala, a das Arbeitsäquivalent der gewöhnlichen Wärmeeinheit und g die Beschleunigung durch die Schwere. Dann lässt sich der Satz von der Erhaltung der Energie durch Gleichsetzung der gewonnenen und verlorenen Differentialarbeit in folgender Form aussprechen:

$$(1) \quad m s dT = \left(\frac{n}{w} - p h \right) dt.$$

Hier ist zur Abkürzung:

$$a g \mu = m, \quad \frac{E^2 q}{l} = n, \quad 2 a g l \sqrt{\pi q} = p$$

gesetzt worden; m , n , p sind also Constante; n und p sind es, streng genommen, nicht, weil mit T auch q und l sich ändern; es soll und muss jedoch von diesen Aenderungen hier abgesehen werden, weil bei der Berechnung der Versuche von Matthiessen und Arndtsen, auf welche die Formeln Anwendung finden sollen, von ihnen abgesehen worden ist. Dagegen sind s , w , h Functionen von T ; in ersterer Annäherung sind dabei die beiden ersten Grössen von T unabhängig, während h die Temperatur in der ersten Potenz enthält. Es ist daher auch ganz allgemein h um einen Grad höher in T , als die Functionen s und w . In dem aus der Gleichung (1) sich ergebenden Integrale:

$$\frac{t}{m} = \int \frac{w s dT}{n - p h w} + \text{const.}$$

ist also der Nenner um einen Grad höher in T als der Zähler; und daraus folgt, dass die Ausführung der Integration ausser algebraischen Functionen auch logarithmische ergibt.¹⁾ In einem einzigen Falle wird das Integral besonders einfach, d. h. es ergibt einfach den Logarithmus, oder umgekehrt, die Temperatur im Stromkreise wird auf einfache Weise eine Exponentialfunction der Zeit; in dem

1) Ein derartiges Integral kann, ausser zum log. auch zum arc tg führen; man sieht aber leicht, dass bei den obigen Werthen der Constanten dies nicht der Fall ist.

Falle nämlich, dass in dem unter dem Integralzeichen stehenden Bruche der Zähler, abgesehen von einem constanten Factor, das Differential des Nenners ist. Diesen, durch die Gleichung:

$$(2) \quad ws = \text{const.} \left(h \frac{dw}{dT} + w \frac{dh}{dT} \right)$$

dargestellten Fall wollen wir nun näher verfolgen. Zunächst ist zu bemerken, dass die Grösse n , also auch die Grösse E in der Gleichung (2) gar nicht mehr vorkommt. Das Folgende gilt also für jede beliebige electromotorische Kraft. Dasselbe ist über die Grössen μ , q , l , also über die Masse und Dimensionen des Drahtes, sowie über die dynamischen Constanten a und g zu bemerken.

Wir setzen nun:

$$w = w_0 (1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots)$$

$$s = s_0 (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots)$$

und:

$$h = h_0 \left((T - T_0) + \gamma (T - T_0)^2 + \dots \right),$$

oder nach Potenzen von T geordnet:

$$h = h_0 \left(-T_0(1 - \gamma T_0) + T(1 - 2\gamma T_0) + (\gamma + \dots) T^2 + \dots \right).$$

Es müssen dann die Coëfficienten der einzelnen Potenzen T , in (2) eingesetzt, die Summe 0 ergeben. Schreiben wir für die Constante kurz c , so ergeben die beiden ersten Potenzen auf diese Weise die beiden Gleichungen:

$$(3) \quad s_0 = c [1 - (\alpha_1 + 2\gamma) T_0 + \alpha_1 \gamma T_0^2],$$

$$(4) \quad s_0(\alpha_1 + \beta_1) = c [2(\alpha_1 + \gamma) - 2T_0(2\alpha_1\gamma + \alpha_2) + 2\alpha_2\gamma T_0^2].$$

Hieran ist wiederum eine Bemerkung zu knüpfen: auch die Grösse w_0 ist in den Gleichungen (3) und (4) nicht mehr enthalten; die folgenden Betrachtungen gelten also, unabhängig von der Grösse des specifischen Widerstandes des Metalles bei 0° C. Um die Constante c , welche willkürlich ist, zu eliminiren, wollen wir (4) durch (3) dividiren. Dabei fällt auch s_0 heraus; der Werth der specifischen Wärme hat also auf das Folgende ebenfalls keinen Einfluss. Von den verschiedenen Temperaturcoëfficienten

wollen wir zunächst die Grösse α_2 vernachlässigen; damit beschränken wir die anzustellende Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung auf die Versuche von Arndtsen und schliessen diejenigen von Matthiessen aus. Wir wollen ferner die Grösse β_1 zuerst vernachlässigen; nach den vorliegenden Bestimmungen ist sie in der That in den meisten Fällen sehr klein; klein selbst gegen die Grösse α_1 , mit welcher sie in Gleichung (4) durch Addition verbunden ist. Hinsichtlich des Coëfficienten γ endlich ist Folgendes zu bemerken. Nach den Versuchen von Dulong und Petit lässt sich die Ausstrahlung für Metalle durch die Formel:

$$H = 0,5 \times 1,0077^{T_0} (1,0077^{T-T_0} - 1) + 0,017 p^{0,45} (T - T_0)^{1,233}$$

darstellen, wo p den Druck der Umgebung in Atmosphären bedeutet. Die Darstellung von h durch eine Potenzreihe, wie sie oben gewählt wurde, kann daher selbst den Sinn einer Annäherungsformel nur mit der Einschränkung haben, dass man jedesmal die Grenzen festsetzt, innerhalb welcher die Temperatur variiren soll. Es möge z. B. für die Temperatur T_0 der Umgebung der kleinste Werth angenommen werden, welcher möglich ist, d. h. der Werth $T_0 = -273$, und es soll angegeben werden, wie gross γ ist, falls die Temperatur des ausstrahlenden Körpers zwischen 0° und 100° variirt; der Druck der Umgebung sei der normale $p = 1$. Man findet zunächst:

$$H_0 = 0,0616 (1,0077^{273} - 1) + 0,017 \cdot 273^{1,233},$$

$$H_{100} = 0,0616 (1,0077^{373} - 1) + 0,017 \cdot 373^{1,233},$$

$$\text{also: } H_0 = 17,5872 = 273 \times 0,06442,$$

$$H_{100} = 26,2132 = 373 \times 0,07027.$$

Wären die beiden zweiten Factoren auf den rechten Seiten dieser Gleichungen einander gleich, so wäre γ gleich Null; um es zu finden, muss man sich zunächst darüber entscheiden, wie viel Glieder man in der Gleichung:

$$H = \text{const.} (T - T_0) \left(1 + \gamma (T - T_0) + \dots \right)$$

berücksichtigen will. Berücksichtigt man nur noch das mit γ behaftete, so erhält man für γ eine Zahl, welche offenbar die Bedeutung einer obren Grenze besitzt. In diesem Falle gelten die beiden Gleichungen:

$$1 + 273\gamma = \text{const. } 0,06442,$$

$$1 + 373\gamma = \text{const. } 0,07027,$$

also durch Division:

$$\gamma = 0,0012 \text{ im Maximum.}$$

Bedeutend kleiner wird γ noch 1) durch Berücksichtigung des Coëfficienten von $(T - T_0)^3$, wobei man dann der Gleichung von Dulong und Petit drei Werthe von H entnehmen muss (z. B. für $T_0 = -273$, $T_1 = 0$, $T_2 = 100$, $T_3 = 200$ wird γ etwa zehnmal so klein); 2) wenn der Druck p grösser ist als eine Atmosphäre (für $p = 10$ ist z. B. $\gamma = 0,00103$). Dagegen wird γ grösser: 1) wenn T_0 grösser ist als -273 (z. B. für $T_0 = 0$ wird die obere Grenze $\gamma = 0,0026$; 2) wenn $p < 1$ ist (schon für $p = 0,1$ ist $\gamma = 0,00393$, also grösser als α_1).

Aus diesen Rechnungen folgt, dass, wenn wir in Folgendem auch γ vernachlässigen, wir im allgemeinen einen sehr beträchtlichen Fehler machen, welcher nur dann klein wird, wenn wir den Druck nicht kleiner als eine Atmosphäre und die Temperatur der Umgebung nicht sehr entfernt vom absoluten Nullpunkte wählen. Die erstere Bedingung soll als erfüllt angenommen werden; die letztere wollen wir im Auge behalten.

Unter diesen Voraussetzungen nimmt die durch Division von (3) in (4) entstehende Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\alpha = \frac{2\alpha}{1 - \alpha T_0},$$

(wo der Index 1 fortgelassen wurde). Die Wurzel $\alpha = 0$ dieser Gleichung muss deshalb ausgeschlossen werden, weil sie mit der Vernachlässigung von β und γ gegen α im Widerspruche steht. Es bleibt also nur noch die Gleichung:

$$1 = \frac{2}{1 - \alpha T_0},$$

aus welcher folgt:

$$(5) \quad \alpha = - \frac{1}{T_0}.$$

Rufen wir uns jetzt die Bedeutung dieser Gleichung ins Gedächtniss zurück. Wenn sie stattfindet, wird die Temperatur im Schliessungsdrahte eine einfache Exponentialfunction der Zeit; kennt man in (5) den Werth von α , so findet man daher: Für eine ganz bestimmte Temperatur der Umgebung ist das Erwärmungsgesetz des Schliessungsdrahtes ein besonders einfaches. Aber man kann auch umgekehrt schliessen. Man kann nämlich, ohne den Werth von α zu kennen, den Werth angeben, welchen T_0 in (5) haben muss, und aus diesem Werthe dann mit Hülfe von (5) α berechnen. Wenn nämlich eine von einer bestimmten physikalischen Grösse (hier T_0), und zwar nur von dieser abhängige Erscheinung für einen bestimmten Werth dieser Grösse eine Besonderheit zeigt, welche sie für alle anderen Werthe der Grösse nicht zeigt, so muss jener Werth ein ausgezeichneter sein, und zwar ein durch die Natur der Verhältnisse, nicht durch willkürliche Festsetzungen ausgezeichneter. Es gibt aber nur einen Werth der Temperatur, welcher, unabhängig von willkürlichen Scalen, eine ausgezeichnete Bedeutung besitzt, das ist der absolute Nullpunkt der Temperatur, in unserer Scala der Punkt $T_0 = -273$. In der obigen Gleichung (5) ist daher $T_0 = -273$, d. h. derjenige Werth von T_0 zu setzen, welcher den Fehler der Vernachlässigung von γ am kleinsten macht, und folglich ist:

$$\alpha = 0,00366.$$

Hiermit ist die Thatsache, dass mit einer gewissen Annäherung der Temperaturcoefficient des galvanischen Widerstandes der einfachen, festen Metalle mit dem thermischen Ausdehnungcoefficienten der Gase übereinstimmt, mathematisch beschrieben und zugleich gezeigt, wie gross diese Annäherung ist. Auch ist es nicht schwer, die Formeln ohne die gemachten Vernachlässigungen durchzuführen; in die Gleichung zwischen α_1 und T_0 gehen

dann auch noch die Grössen α_2 , β und γ ein; aber bei dem geringen Einflusse, den diese Correctionen im allgemeinen haben, und bei der Ungenauigkeit der vorhandenen Zahlenangaben über die Grösse α_1 ist ein Vergleich mit der Erfahrung nur in sehr beschränkter Weise anzustellen.

Was zunächst den Einfluss des Umstandes, dass die spezifische Wärme mit der Temperatur sich ändert, auf die Grösse α betrifft, so ergibt die Rechnung an Stelle der Gleichung (5) bei Berücksichtigung von β die neue:

$$(6) \quad \alpha = \frac{1 + \beta T_0 + \sqrt{1 + 6\beta T_0 + \beta^2 T_0^2}}{-2 T_0},$$

in welcher $T_0 = -273$ zu setzen ist.

Dieser Gleichung entspricht als Curve eine Hyperbel mit einem Asymptotenwinkel von 45° ; für $\beta = \infty$ wird nämlich, je nachdem das Vorzeichen der Wurzel negativ oder positiv gewählt wird, $\alpha = +\frac{1}{T_0}$, also von β unabhängig, oder $\alpha = -\beta$, also dem absoluten Werthe nach diesem gleich; umgekehrt verhält es sich für $\beta = -\infty$. Die eine Asymptote ist also der β -Axe parallel und hat die Ordinate $\alpha = -0,00366$; die andere verläuft unter einem Winkel von 45° , geht aber nicht durch den Nullpunkt, sondern schneidet die positive α -Axe und die positive β -Axe im Abstände $\frac{2}{273}$ vom Nullpunkte; dagegen geht der eine Zweig der Hyperbel selbst durch den Nullpunkt. Nun soll für $\beta = 0$ α nicht $= 0$, sondern $\alpha = 0,00366$ werden; folglich ist von der Hyperbel nur derjenige Theil zu berücksichtigen, welchen man vom Punkte $\beta = 0,00063$, $\alpha = 0,00152$ durch den Punkt $\alpha = 0,00366$, $\beta = 0$, durch den Punkt $\alpha = \infty = -\beta$ und den identischen Punkt $\alpha = -\infty = -\beta$ zu dem Punkte $\alpha = -0,00884$, $\beta = 0,02135$ beschreibt.

Für die einfachen Metalle ist, wie erwähnt, β sehr klein. Die Zahlen von Byström, welche wohl die zuverlässigsten sind, geben bei Zugrundelegung von Temperaturgrenzen, welche den Beobachtungen über die Grösse α zu

Grunde liegen, den Mittelwerth 0,00009. Man kann also βT_0 als klein gegen 1 betrachten und erhält dann statt (6) einfacher:

$$(7) \quad \alpha = -\frac{1}{T_0} - 2\beta.$$

Hiernach muss der Temperaturcoefficient des galvanischen Widerstandes bei den festen, einfachen Metallen, wie er von Arndtsen bestimmt wurde, etwa um das Doppelte des Temperaturcoefficienten der specifischen Wärme kleiner sein, als er es nach dem Satze von Clausius wäre. Nach den am Eingange gemachten Angaben ist jener Mittelwerth etwa um 0,00013 kleiner als 0,00366, was damit ziemlich übereinstimmt. Eine Vergleichung im einzelnen ist jedoch nicht möglich.

Bedeutend grösser als bei den Metallen ist nach den schönen Untersuchungen von H. F. Weber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme bei den Elementen Bor, Silicium und Kohlenstoff. Leider liegen für diese Körper keine Bestimmungen der Grösse α vor; nur für Gaskohle hat Matthiessen¹⁾ die gelegentliche Angabe gemacht, dass der Widerstand derselben mit steigender Temperatur, wenn auch äusserst langsam, abnehme. Dieses Resultat glaubte ich, wie F. Exner²⁾, durch innere Veränderungen der benutzten Kohle erklären zu sollen und unternahm daher mit der sehr dichten Gaskohle der hiesigen Gasanstalt eine neue, eingehende Bestimmung des Widerstandes, deren Resultat ich inzwischen bekannt gemacht habe.³⁾ Darnach ist erstens die Grösse α_1 positiv, wenn auch beträchtlich kleiner als bei Metallen, zweitens aber die Berücksichtigung von α_2 erforderlich. Das letztere ergibt auch die Theorie. Nach Weber⁴⁾ ist nämlich die zur Erwärmung der Gewichtseinheit dichter, amorpher

1) Pogg. Ann. CIII. p. 428. 1858.

2) Wien. Ber. 16. März 1876.

3) Gött. Nachr. p. 269. 1879.

4) Pogg. Ann. CLIV. p. 367 u. 553. 1875.

Kohle von 0° auf 99° erforderliche Wärmemenge $W_0^{99} = 19,0$ und die entsprechende Grösse $W_0^{225} = 53,4$. Daraus findet man die spezifische Wärme:

s_ϕ bei 9° : $s_{44} = 0,1906$, $s_{113} = 0,2343$, $s_{162} = 0,2719$,
und hieraus zwischen 44° und 113° :

$$\beta = 0,0033, \text{ zwischen } 113^\circ \text{ und } 162^\circ: \beta = 0,0032.$$

Nach der von Weber allgemein gefundenen Thatsache, dass β mit der Temperatur abnimmt, wird man nicht fehl gehen, wenn man zwischen 0° und 100° $\beta = 0,0036 = -\frac{1}{T_0}$ setzt. Für diesen Werth liefert aber die oben construirte Hyperbel kein reelles α ; folglich muss noch α_2 berücksichtigt werden. Nun ergeben die Gleichungen (3) und (4) bei Berücksichtigung von β und α_2 :

$$(8) \quad \alpha_1 + \beta = \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 T_0}{1 - \alpha_1 T_0},$$

also:

$$(9) \quad \alpha_1 = \frac{1 + \beta T_0 + \sqrt{1 + 6\beta T_0 + \beta^2 T_0^2 + 8\alpha_2 T_0^2}}{-2 T_0}.$$

Für $\beta = -\frac{1}{T_0}$ gibt dies:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{8 \cdot 273^2 \cdot \alpha_2 - 4}}{546}.$$

Nun gelten die von mir a. a. O. gegebenen Formeln für den Widerstand der Gaskohle zwischen 0° und 140° ; zwischen 0° und 100° genügt eine etwas veränderte Wahl der Werthe von α_1 und α_2 noch genauer; nämlich $\alpha_1 = 0,0006$, $\alpha_2 = 0,000\,007$; setzt man diesen Werth von α_2 oben ein, so findet man $\alpha_1 = 0,0007$. Diese Uebereinstimmung ist um so befriedigender, als schon sehr unbedeutende Veränderungen von α_2 den Werth von α_1 nicht nur erheblich beeinflussen, sondern auch imaginär machen können.

Die Gleichung (8) kann man auch auf Metalle anwenden und gelangt so zu einer Vergleichung der Zahlen von Matthiessen mit der Theorie. Matthiessen hat nicht den Widerstand, sondern die Leitungsfähigkeit durch

eine Function zweiten Grades ausgedrückt. Nun folgt aus der Gleichung:

$$w = w_0(1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2),$$

welche hier als gültig angenommen werden soll, die andere:

$$\lambda = \lambda_0(1 - \alpha_1 T + (\alpha_1^2 - \alpha_2) T^2 + \dots)$$

oder mit Zusammenfassung aller Glieder vom dritten an:

$$\lambda = \lambda_0(1 - \alpha_1 T + (\alpha_1^2 - \alpha_2) \varkappa T^2),$$

wo \varkappa ein Zahlenfactor ist, der sich näherungsweise angeben lässt, wenn die bei den Versuchen stattgehabte Mitteltemperatur bekannt ist. Man kann dann aus den von Matthiessen gefundenen Zahlen α_1 und $\varkappa(\alpha_1^2 - \alpha_2)$ die Grössen α_1 und α_2 berechnen. Andererseits ergibt die Theorie bei Vernachlässigung von β :

$$\alpha_1 = \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 T_0}{1 - \alpha_1 T_0}, \quad \text{also:} \quad \alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha_2 T_0^2}}{-2 T_0},$$

und wenn man hier das nach Matthiessen berechnete α_2 einsetzt, so erhält man die gewünschte Vergleichung von α_1 . Da ich den Werth jener Mitteltemperatur bei den Versuchen von Matthiessen nicht kenne, so muss ich mich darauf beschränken, zu constatiren, dass nach der Formel (10) der Einfluss eines positiven α_2 den Werth von α_1 vergrössert, was bei Matthiessen in der That der Fall ist, der Mittelwerth von α_1 beträgt 0,00379 statt 0,00366; die Vergrösserung würde übrigens noch beträchtlicher sein, wenn nicht andererseits der Einfluss von β den Werth von α_1 herabdrückte.

Es sollen nun aus der Gleichung (9), der jedoch eine andere Form gegeben werden möge, einige allgemeine Schlüsse gezogen werden. Es soll $\alpha_2 = \alpha_1^2 \cdot \varkappa$ gesetzt und dieser Werth in (8) eingesetzt werden; \varkappa hat also jetzt gegenüber den letzten Betrachtungen eine etwas veränderte Bedeutung. Man findet dann:

$$(10) \quad \alpha_1 = \frac{1 - 273\beta + \sqrt{1 - 546 \times (3 - 4\varkappa)\beta + 273^2 \beta^2}}{2 \times 273(1 - 2\varkappa)}.$$

Hiernach ist α_1 reell, wenn:

$$(11) \quad \begin{aligned} &\text{entweder } \beta < \frac{1}{273} ((3 - 4x) - 2\sqrt{2 - 6x + 4x^2}) \\ &\text{oder } \beta > \frac{1}{273} ((3 - 4x) + 2\sqrt{2 - 6x + 4x^2}) \end{aligned}$$

ist, oder umgekehrt, wenn:

$$(12) \quad \begin{aligned} &\text{für } \beta > 0 : x > \frac{6 \times 273 \beta - 273^2 \beta^2 - 1}{8 \times 273 \beta}, \\ &\text{für } \beta < 0 : x < \frac{6 \times 273 \beta - 273^2 \beta^2 - 1}{8 \times 273 \beta} \end{aligned}$$

ist. Nach den Ungleichungen (11) darf, falls x zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt (und das ist der am häufigsten vorkommende Fall), β jeden beliebigen Werth haben; dagegen ist ihm für kleinere Werthe von x ein gewisses, sich allmählich erweiterndes positives, für grössere Werthe von x ein gewisses negatives Gebiet verschlossen.

Diese Formeln zeigen noch, wie die früheren einfachen, dass α_1 desto kleiner ist, je grösser β ist. Für viele Leiter des galvanischen Stromes ist α_1 sogar negativ. Auf die meisten derselben, nämlich die chemisch zusammengesetzten Flüssigkeiten, ist die Gleichung (1) aber nicht ohne weiteres anwendbar, weil bei ihnen ausser der Erwärmungsarbeit noch die Zersetzungsarbeit in Betracht zu ziehen ist. Nur kann man einsehen, dass dadurch α kleiner als sonst oder gar negativ werden muss. Das zu dem Gliede $\frac{n}{w}$ hinzukommende ist nämlich als verlorene Energie negativ zu setzen; da es nun mit der durch den Strom erzeugten Temperatur wächst, die modificirte Gleichung (1) aber gültig bleiben muss, so muss das Glied $\frac{n}{w}$ entweder weniger stark mit der Temperatur abnehmen, als bei einfachen Körpern, oder sogar mit wachsen; das erstere ist der Fall, wenn α kleiner ist als aus (5) oder (6) sich ergibt; das letztere, wenn α negativ ist. Für die chemischen Verbindungen festen Aggregatzustandes sind die auf α_1 , α_2 und β bezüglichen Daten nur theilweise bekannt, sodass eine Vergleichung nicht möglich

ist. Es gibt aber auch einige einfache, feste Körper, für welche sich α negativ ergeben hat, z. B. Phosphor, Selen, Tellur; es soll daher untersucht werden, wann in (10) α_1 reell und negativ wird.

Erstens, wenn bei Erfüllung von (12) der Zähler negativ, der Nenner positiv ist; hierzu ist nur erforderlich, dass $x < \frac{1}{3}$ sei; wenn x die Werthe 0 bis $\frac{1}{3}$ durchläuft, kann dann nach (11) β alle möglichen Werthe durchlaufen. Zweitens, wenn die Ungleichungen (12) bestehen, der Zähler in (10) positiv, der Nenner negativ ist; es muss also $x > \frac{1}{3}$ sein, und wenn x von $\frac{1}{3}$ an wächst, kann nach (11) β alle möglichen Werthe durchlaufen, wird jedoch immer mehr beschränkt. Im ersten Falle erhält x , falls β positiv ist, durch die erste der Ungleichungen (12) eine untere Grenze. Für Selen z. B. ist nach einer freilich vereinzeltten Messung von Bettendorf und Wüllner¹⁾ zwischen 37° und 40° $\beta = 0,013$; (es ist nämlich, wie dort angegeben, die mittlere spezifische Wärme zwischen 22° und 52° $c_1 = 0,1104$, zwischen 19° und 61° $c_2 = 0,1147$; diese Zahlen stellen also näherungsweise auch die wahren spezifischen Wärmen bei 37° resp. 40° dar, und folglich ist $\beta = \frac{c_1 - c_2}{3c_1} = 0,013$). Andererseits hat Siemens²⁾ die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit des Selens von der Temperatur untersucht, und Frölich aus diesen Versuchen die Formel:

$$l = -17 + 8,48 \times (1,025)^T$$

berechnet. Hieraus kann man den Widerstand zwischen 37° und 40° mit einer gewissen Annäherung als Function zweiten Grades von T ableiten, indem man von den drei für die Temperaturen 37°, 38 $\frac{1}{2}$ °, 40° gültigen Gleichungen ausgeht:

$$\frac{1}{l_{37}} = w_0 (1 + 37\alpha_1 + 37^2\alpha_2), \quad \frac{1}{l_{38,5}} = w_0 (1 + 38,5\alpha_1 + 38,5^2\alpha_2),$$

$$\frac{1}{l_{40}} = w_0 (1 + 40\alpha_1 + 40^2\alpha_2).$$

1) Pogg. Ann. CXXXIII. p. 310. 1868.

2) Pogg. Ann. CLIX. p. 125. 1876.

Man findet dann zwischen 37° und 40° :

$$w = 3,97 (1 - 0,0425 T + 0,00049 T^2)$$

also: $\alpha = 0,27$.

Daraus folgt, dass in (10) α_1 negativ wird, wenn es überhaupt reell wird; es wird aber gerade noch reell; denn die Bedingung (11) liefert als zweite Alternative $\beta > 0,013$. Damit ist der von Siemens gefundene Werth von α_1 seinem Vorzeichen nach erwiesen; der absolute Werth aber wird nach (10) nur 0,0102, also viel zu klein. Dieser Mangel an Uebereinstimmung ist entweder der Unsicherheit der Zahl $\beta = 0,013$ oder dem Umstande zuzuschreiben, dass auf das Selen die Gleichung (1) nicht ohne weiteres angewendet werden darf, weil bei dem Durchgange des Stromes ausser thermischer noch Krystallisationsarbeit geleistet wird. Diese letztere fügt nämlich zur Gleichung (1) rechts ein Glied hinzu, welches erstens positiv ist und zweitens allmählich abnimmt; das Glied $\frac{n}{w}$ muss daher stärker als sonst zunehmen; dies ist aber der Fall, wenn α_1 stärker negativ ist. Hiermit stimmt es auch überein, dass, wenn man die algebraische Formel für w aus der Frölich'schen für höhere Temperaturen berechnet, wo die Krystallisation schon vollendet ist, α_1 sich dem von der Theorie geforderten Werthe erheblich nähert; so erhält man zwischen 30° und 100° :

$$w = 3,393 (1 - 0,025 T + 0,00015 T^2),$$

d. h. bei fast unverändertem α ($\alpha = 0,24$) $\alpha_1 = -0,025$.

Dem Selen in mancher Beziehung ähnlich ist das Tellur. Eine brauchbare Untersuchung über dessen spezifische Wärme ist mir nicht bekannt. In galvanischer Hinsicht ist es von Exner¹⁾ eingehend bearbeitet worden; aus einer seiner Versuchsreihen (Stab III, Versuch 4) habe ich mit Zugrundelegung der Temperaturen 22° , 120° , 200° die Formel:

$$w = \text{const.} (1 - 0,0075 T + 0,000016 T^2)$$

berechnet.

1) Wien. Ber. LXXIII. (2) p. 285. 1876. Pogg. Ann. CLVIII. p. 625. 1876.

Während also α_1 und α_2 beträchtlich kleiner sind als beim Selen, hat κ nahezu denselben Werth, nämlich $\kappa = 0,28$, und die Gleichung (8) ergibt, unter Voraussetzung der Anwendbarkeit der Gleichung (1), $\beta = 0,0135$, also gerade so gross wie beim Selen.

Genau auf dieselbe Weise erhält man für Quecksilber, wenn man von der Gleichung von Matthiessen und v. Bose¹⁾:

$$l = l_0 (1 - 0,00074 T + 0,000\,000\,83 T^2)$$

oder der identischen:

$$w = w_0 (1 + 0,00074 T - 0,000\,000\,28 T^2)$$

ausgeht, $\beta = 0,00040$. Für diese Grösse sind mir zwei Messungen bekannt, eine von Regnault²⁾ und eine von Winkelmann³⁾; nach der einen ist $\beta = 0,00280$, also sehr viel grösser als bei den festen Metallen, nach der andern muss man $\beta = 0$ setzen, wenn man die andere Alternative ($\beta < 0$) aus theoretischen Gründen von vorn herein verwirft. Der obige theoretische Werth liegt zwischen beiden, dem Winkelmann'schen jedoch näher. Der theoretisch gefundene Werth hat überdies zwei beachtenswerthe Eigenschaften. Erstens stimmt er fast genau überein mit dem von Winkelmann aus Versuchen von Dulong-Petit und von Regnault berechneten ($\beta = 0,00044$).⁴⁾ Zweitens macht er die für die Thermodynamik so wichtige specifische Wärme bei constantem Volumen nahezu unabhängig von der Temperatur; die kleine Abnahme, welche diese Grösse aufweist, stimmt nahezu mit der entsprechenden beim Wasser überein.

Zum Schlusse komme ich noch einmal auf das Eisen zurück, für welches, wenn μ das Verhältniss der magnetischen zur thermischen Arbeit ausdrückt, die Gleichung (1) durch die modificirte:

1) Pogg. Ann. CXV. p. 352. 1862.

2) Ann. de chim. et phys. (3) IX. p. 322. 1843.

3) Pogg. Ann. CLIX. p. 152. 1876.

4) Pogg. Ann. CLVII. p. 527. 1876.

$$msdT = \left[\frac{n}{w} (1 + \mu) - ph \right] dt$$

zu ersetzen ist. Hierin hängt μ nicht nur von den Grössen l , q etc., sondern auch von T selbst ab, und daher erklärt es sich, dass die Angaben für α_1 bei Eisen mehr voneinander abweichen als bei anderen Metallen. Jedenfalls muss, da im ersten Gliede rechts der Zähler vergrössert ist, auch der Nenner grösser werden, d. h. α_1 selbst; in der That ist es um etwa 20 Proc. grösser als bei Kupfer.

Breslau, am 9. Juni 1879.

X. Ueber die Ströme der Gramme'schen Maschine; von O. E. Meyer und F. Auerbach.

Die dynamoelectrische Maschine von Gramme ist in den letzten Jahren mehrfach zum Gegenstande von, theils vorwiegend praktischen Zwecken dienenden, theils aber auch theoretischen Untersuchungen gemacht worden. Hagenbach¹⁾ und Achard²⁾, Will. Thomson³⁾, sowie Mascart und Angot⁴⁾ haben die Frage der Arbeitsleistung, Herwig⁵⁾ hat das Ansteigen des Magnetismus vornehmlich ins Auge gefasst. Dagegen sind die bei der genannten Maschine zwischen Drehungsgeschwindigkeit, Widerstand, Stromstärke und electromotorischer Kraft stattfindenden Beziehungen, wie es scheint, noch nicht eingehend geprüft worden. Aus diesem Grunde theilen wir hierdurch von den Versuchen, welche wir im Laufe

1) Arch. sc. phys. 1876. Pogg. Ann. CLVIII. p. 599. 1876. Carl Repert. XII. p. 316.

2) Arch. sc. phys. (2.) LXIII. p. 332. 1878.

3) Journ. d. phys. VI. p. 240. 1877.

4) Journ. d. phys. VI. p. 203. 297. 1877; VII. p. 79. 363. 1878. Beibl. II. p. 433. 1878.

5) Wied. Ann. VII. p. 193. 1879.

des letzten Jahres angestellt haben, diejenigen mit, welche sich auf die oben erwähnten Verhältnisse beziehen. Dabei soll ausschliesslich der stationäre Zustand ins Auge gefasst werden, d. h. derjenige Zustand, welcher eintritt, sobald die gegenseitige Verstärkung von Magnetismus und Stromstärke ihr Ende erreicht. Nach Herwig können, falls der Widerstand mehrere Siemens'sche Einheiten beträgt, einige Secunden vergehen, ehe dies der Fall ist; beiläufig sei im Anschlusse hieran erwähnt, dass bei unseren Versuchen, welche sich bis zu einigen hundert Widerstandseinheiten erstreckten, jene Zeit auch noch beträchtlich grössere Werthe erreichte.

Die von uns benutzte Maschine des Breslauer physikalischen Cabinets ist eine von der Pariser Gesellschaft, deren Director Hr. Hipp. Fontaine ist, bezogene echte Gramme'sche Maschine, welche in der Fabrik von Mignon und Rouart nach dem häufig dargestellten¹⁾ Muster gebaut ist. Eine solche Maschine stellt bekanntlich nur einen Zweigstrom zur Verfügung. Es ist nämlich die rotirende Rolle in sich geschlossen, und von zwei gegenüberliegenden Punkten derselben sind Drähte um die festen Eisenkerne geführt; an die Enden dieser Drähte schliessen sich dann unmittelbar die Leitungsdrähte. Von letzteren abgesehen, hat die Maschine einen Widerstand $w_0 = 1,02$ S.-E. Bezeichnet man die Widerstände der beiden Theile der rotirenden Rolle mit w_2 und w_3 , den Widerstand des festen Drahtes mit w_1 , so ist daher:

$$w_0 = w_1 + \frac{1}{\frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}} = w_1 + \frac{w_2 w_3}{w_2 + w_3} = 1,02.$$

Da w_1 und $w_2 - w_3$ kleine Grössen sind, so folgt, dass die rotirende Rolle, für sich betrachtet, einen Widerstand von nahezu 4 S.-E., also jeder ihrer Theile von nahezu 2 S.-E. besitzt.

Bei den folgenden Versuchen war der Gesamtwider-

1) Fontaine, éclairage à l'électricité. Paris 1877. Fig. 35. p. 121
Carl, Report. Bd. XI. Taf. 13.

stand w im Minimum gleich 1,78 S.-E. Damit nämlich die strom- und widerstandsmessenden Apparate von der Gramme'schen Maschine nicht beeinflusst würden, mussten die Zuleitungsdrähte durch mehrere Säle hindurchgeführt werden. Die Stromstärke wurde mittelst Fernrohr und Scala durch eine Spiegeltangentenbussole gemessen, deren Magnet zum Zwecke der Schwächung der Stromwirkung sammt Spiegel auf der Axe des Stromkreises verschoben und so in beliebige Entfernung von der Ebene desselben gebracht werden konnte. Das Maass der Stromstärke i war ein willkürliches; befand sich nämlich der Magnet in der Ebene des Stromkreises, so wurde einfach $i = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt, wenn $2\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{r}$ und a die beobachtete Ablenkung, r die Entfernung des Spiegels von der Scala war. Für jede andere Stellung des Spiegels musste dann erstens der Werth von r geändert und zweitens zur Gewinnung von i die Grösse $\operatorname{tg} \varphi$ mit der dritten Potenz des Verhältnisses der beiden Entfernungen des Magnets von irgend einem Punkte des Stromkreises multiplicirt werden, d. h. sie musste mit dem Cubus der Entfernung multiplicirt und mit dem Cubus des Bussolenradius dividirt werden.

Weder bei der Drehung der Maschine mit der Hand, noch bei Dampftrieb ergab sich eine constante Ablenkung der Bussole; vielmehr schwankte das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs zwischen bald mehr, bald weniger entfernten Grenzstellungen. Diese Schwankungen wurden genau während derselben Zeit beobachtet, während deren die Drehungsgeschwindigkeit bestimmt wurde, und aus ihnen durch eine leicht ersichtliche Rechnung die Gleichgewichtslage berechnet, welche beobachtet worden wäre, wenn die beiden Vorgänge der Drehung und der Strombildung völlig gleichmässige wären.

Die Drehungsgeschwindigkeit n , d. h. die Anzahl der Umdrehungen der Gramme'schen Maschine in der Minute wurde an dem Handrade, resp. an der Dampfmaschine mit Hülfe von Chronometer und Metronom, zum Theil

mit Benutzung der von den Geräuschen erzeugten Schwebungen, bis auf ganze Umdrehungen genau gemessen. Bei Werthen von n , welche die Zahl 850 überstiegen, stellten sich meist Geräusche ein, welche auf ein Gleiten des Riemens auf dem Rade der Gramme'schen Maschine hindeuteten; die bezüglichen Versuche lieferten, durch unverhältnissmässig kleine Werthe von i , eine Bestätigung dieser Vermuthung, zeigten aber weiter, dass das Gleiten zwei verschiedene Ursachen haben müsse; es ergab sich nämlich, dass zuweilen Versuche mit sehr grossem n und (infolge grossen Widerstandes w) kleinem i noch brauchbare Zahlen lieferten, während solche mit gleichem n , aber grossem i letzteres bereits viel zu klein lieferten; erst bei noch grösserem n fand der Mangel an Uebereinstimmung unabhängig von w statt. Hieraus ist zu schliessen, dass bei grossen Werthen von n ausser durch mechanische Gründe auch dadurch Gleitung veranlasst wird, dass die starken Ströme eine Drehung der Maschine im entgegengesetzten Sinne zu erzeugen bestrebt sind. Die meisten dieser Versuche sind im Folgenden ausgeschlossen, die beibehaltenen aber durch Klammern kenntlich gemacht worden.

Der Widerstand wurde nach der Methode von Wheatstone mittelst eines Siemens'schen Universalwiderstandskastens gemessen, und zwar bei stärkeren Strömen vor und nach jedem Versuche. Zu diesem Zwecke war ein Stöpselumschalter in den Kreis eingeschaltet, welcher ihn während der Strommessung unmittelbar schloss, ihn dagegen während der Widerstandsmessung zur vierten Seite des Wheatstone'schen Vierecks machte. Den Strom lieferte ein Daniell'sches Element, die Messung wurde mit einem Siemens'schen aperiodischen Galvanometer ausgeführt, welches gestattete, nach der Ausführung jedes Stromversuches den Widerstand rasch zu bestimmen, ehe durch Ausstrahlung merkliche Abkühlung eingetreten war.

Die Versuche zur Bestimmung der Abhängigkeit der Stromstärke von der Drehungsgeschwindigkeit wurden von

$n = 25$ bis $n = 876$ ausgedehnt, die Handdrehung reichte bis $n = 200$ hinauf, die Dampfmaschine liess sich bis zum Werthe $n = 120$ hinab anwenden. Zunächst wurde dabei w so klein wie möglich, nämlich $w = 1,78$ gewählt. Oberhalb $n = 400$ zeigte sich nun aber der Einfluss der Erwärmung durch den Strom, welcher schliesslich, bei $n = 876$, den Widerstand auf 1,845, also um fast 4 Proc. erhöhte. Es wurde daher für diese Werthe aus der beobachteten Stromstärke nach dem Ohm'schen Gesetze diejenige berechnet, welche bei unverändertem w beobachtet worden wäre. Es gilt zwar, wie weiter unten mitgetheilt werden wird, jenes Gesetz hier im allgemeinen durchaus nicht; es darf jedoch für kleine Werthe von w , zumal wenn die Aenderungen dieser Werthe klein sind, als annähernd gültig betrachtet werden.

Der Einfluss des Stromdurchganges auf den remanenten Magnetismus der Gramme'schen Maschine machte sich dadurch geltend, dass die bei ansteigenden Werthen von n angestellten Versuchsreihen nicht ganz dieselben Ergebnisse lieferten wie die bei abnehmenden Werthen von n angestellten. Die Zahlen der letzteren waren meist etwas höher. Da jedoch die Unterschiede klein sind, und der Gegenstand ausserhalb des Untersuchungsthemas liegt, wurden diese Differenzen durch Bildung von Mittelwerthen eliminirt. Auch an verschiedenen Tagen ergaben sich oft erheblich verschiedene Zahlen für gleiche Werthe von n und w , welche hauptsächlich der vorhergegangenen Benutzung der Maschine zu optischen Zwecken zugeschrieben werden dürften. Auch diese Schwankungen sind entweder schon vor Bildung folgender Tabelle eliminirt oder in dieser durch Zusammenfassung gehoben worden.

Die erste Reihe gibt die Versuchsnummer, die zweite das Datum, die dritte die Drehungsgeschwindigkeit n , die vierte die beobachtete Stromstärke i , die fünfte deren Mittelwerth für gleiche n ; von den beiden letzten, der sechsten und siebenten, wird sogleich die Rede sein.

Tabelle 1,

darstellend i als Function von n , für $w = 1,78$.

[* Die so bezeichneten Zahlen sind der Versuchsreihe vom 23. 6., der ausgedehntesten und zuverlässigsten von allen, durch graphische Interpolation entnommen worden, um dieser Reihe bei der Mittelwerthbildung das ihr entsprechende Gewicht beizulegen.]

Nr. d. Vers.	Dat.	n	i	i im Mittel	$i_{\text{ber.}} = 0,00029 n$	$\delta = \frac{i - i_{\text{ber.}}}{i}$
28	15. 5	21	0,0061	0,0061	0,0061	0
29	"	25	0,0073	0,0073	0,0073	0
30	"	31	0,0090	0,0090	0,0090	0
[31 73	" 18. 5	42	{ 0,0128 0,0134	{ 0,0131	{ 0,0122	{ +0,069
<hr/>						
					$i_{\text{ber.}} = \frac{0,072 n}{266 - n}$	δ
31	15. 5	{	0,0128	"	0,0134	-0,023
73	18. 5	"	0,0134			
7	9. 5	47	0,0154	0,0154	0,0155	-0,006
5	7. 5	63	0,0230	0,0224	0,0223	+0,004
6	9. 5		0,0250			
27	14. 5		0,0201			
32	15. 5		0,0213			
72	18. 5	72	0,0226	0,0262	0,0266	-0,015
26	14. 5		—			
4	7. 5	83	0,0343	0,0321	0,0326	-0,016
9	9. 5		0,0352			
25	14. 5		0,0294			
33	15. 5		0,0317			
71	18. 5	93	0,0298	0,0383	0,0387	-0,010
70	"		—			
[23 34 69	14. 5 15. 5 18. 5	108	{ 0,0463 0,0437 0,0460	{ 0,0453	{ 0,0492	{ -0,036
<hr/>						
					$i_{\text{ber.}} \text{ nach } n = \frac{13500 i_{\text{ber.}}}{3 + \text{arc tg } i_{\text{ber.}}}$	δ
23	14. 5	"	0,0463	"	0,0449	+0,009
34	15. 5		0,0437			
69	18. 5	122	0,0460	0,0585	0,0579	+0,010
1	7. 5		0,0650			
10	9. 5		0,0720			
21	14. 5		0,0580			
35	15. 5		0,0562			
68	18. 5		0,0592			
117	26. 5		0,0494			
130	23. 6		0,0497			
148	"		0,0590			

Nr. d. Vers.	Dat.	<i>n</i>	<i>i</i>	<i>i</i> im Mittel	<i>i</i> ber.	δ
13	9.5	141	0,0787	0,0795	0,0790	+0,006
20	14.5		0,0711			
36	15.5		0,0611			
67	18.5		0,0699			
*	23.6		0,0862			
*	"	151	0,1040	0,0925	0,0928	-0,003
18	14.5		0,0807			
37	15.5		0,0775			
*	23.6		0,1030			
*	"		0,1090			
2	7.5	166	0,139	0,121	0,122	-0,008
11	9.5		0,117			
15	14.5		0,113			
16	"		0,103			
17	"		0,102			
38	15.5	187	0,096	0,194	0,192	+0,010
39	"		0,106			
46	17.5		0,110			
66	18.5		0,138			
*	20.6		0,160			
*	"	211	0,149	0,340	0,343	-0,009
210	8.7		0,119			
47	17.5		0,167			
65	18.5		0,165			
147	23.6		0,208			
*	"	236	0,238	0,584	0,581	+0,005
48	17.5		0,321			
49	"		0,317			
63	18.5		0,232			
64	"		0,302			
116	26.5	275	0,468	0,973	0,949	+0,023
131	23.6		0,355			
*	"		0,436			
*	"		0,294			
45	17.5		0,579			
50	"	293	0,543	0,973	0,949	+0,023
60	18.5		0,680			
61	"		0,459			
62	"		0,524			
102	26.5		0,737			
114	"	311	0,606	0,973	0,949	+0,023
115	"		0,468			
*	23.6		0,571			
*	"		0,680			
51	17.5		1,071			
52	"	327	0,976	0,973	0,949	+0,023
53	"		0,941			
54	"		0,892			
55	18.5		1,065			
56	"		1,008			
57	"	343	0,869	0,973	0,949	+0,023
59	"		0,866			
*	23.6		0,930			
*	"	359	1,060			

Nr. d. Vers.	Dat.	n	i	i im Mitte	$i_{\text{ber.}}$	δ
101	26. 5	302	1,239	1,239	1,150	+0,047
146	23. 6		1,230			
*	"		1,248			
114	26. 5	342	1,60	1,66	1,51	+0,091
132	23. 6		1,63			
145	"		1,77			
*	"		1,61			
100	26. 5	435	2,16	2,30	2,22	+0,035
104	"		2,18			
113	"		2,34			
133	23. 6		2,45			
144	"		2,36			
105	26. 5	557	3,18	3,15	3,10	+0,016
134	23. 6		3,12			
135	"		3,15			
143	"		3,13			
106	26. 5	642	3,61	3,56	3,71	-0,042
136	23. 6		3,51			
142	"		3,53			
87	26. 5	719	3,79	3,82	4,25	-0,113
141	23. 6		3,84			
79	26. 5	759	4,22	4,07	4,51	-0,108
137	23. 6		3,91			
140	"	794	4,20	4,20	4,77	-0,135
139	"	876	4,50	4,50	5,32	-0,132

Wie man sieht, steigt i mit n erst proportional, dann schneller als dieses, zwischen $n = 200$ und $n = 300$ wieder annähernd proportional, dann allmählich immer langsamer und schliesslich, für sehr grosse n , wieder mit n proportional. Die den Zusammenhang zwischen n und i darstellende Curve, die ausgezogene starke in Fig. 1 Taf. IV., hat daher drei nahezu geradlinige Strecken; am steilsten ist die mittelste, weniger steil die letzte, am wenigsten steil die erste. Es gibt verschiedene Functionen, welche eine derartige Beziehung mit einer gewissen Annäherung darstellen können; im vorliegenden Falle erwies sich die Functionalbeziehung:

$$n = \frac{a i}{b + \operatorname{arc} \operatorname{tg} i}$$

am geeignetsten, falls in ihr $a = 13500$, $b = 3$ gesetzt und der Bogen in Winkelgraden ausgedrückt wurde. Die so

berechneten Werthe $i_{\text{ber.}}$ sind in der sechsten Reihe der obigen Tabelle, und in der siebenten die relativen Differenzen $\frac{i - i_{\text{ber.}}}{i}$ zusammengestellt. Für kleine n ist dabei nicht die vollständige Formel, sondern es sind nacheinander diejenigen zu Grunde gelegt worden, welche aus ihr hervorgehen, wenn man die Reihe:

$$\frac{\pi}{180} \arctan i = i - \frac{1}{3} i^3 + \frac{1}{5} i^5 - \dots$$

entweder gleich null oder gleich i setzt; dabei wurde eine unbedeutende, den betreffenden Gebieten angemessene Aenderung der Constanten vorgenommen. Für grosse i einen analogen Weg mit Zugrundelegung der Gleichung:

$$\frac{\pi}{180} \arctan i = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{i}\right)^3 - \dots$$

einzuschlagen, erwies sich nicht als angebracht.

Die benutzte Formel darf nicht als eine rein empirische angesehen werden; denn sie lässt sich auch theoretisch einigermaßen rechtfertigen. Der zur Beobachtung gelangende Strom rührt nämlich theils von dem remanenten, theils von dem inducirten Magnetismus der Maschine her; bezeichnet man erstern mit m , letztern mit M , so ist i bei constantem w durch die Gleichung:

$$ai = n(m + M)$$

bestimmt. Hierin ist m eine Constante, M dagegen eine Function der magnetisirenden Kraft des Stromes i . Ueber die Beziehungen zwischen magnetisirender Kraft und erregtem Magnetismus sind verschiedene Annahmen gemacht worden; geht man von der Grundanschauung drehbarer Molecularmagnete aus, so gelangt man nach einer ursprünglich von Weber¹⁾ angestellten Rechnung zu dem Ergebnisse, dass, je nachdem die magnetisirende Kraft i kleiner oder grösser als eine gewisse Constante D ist, die eine oder die andere der Beziehungen:

$$M = \frac{3}{2} c \frac{i}{D} \quad \text{und} \quad M = c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D^2}{i^2}\right)$$

1) Maassbestimmungen, insbes. über Diamagnetismus. p. 571 ff.

besteht. Hiernach wird i allerdings dreimal mit n proportional, nämlich für $M=0$, $M=\frac{2}{3}c$ und $M=c$; aber die zweite Proportionalität findet bei den Versuchen nicht bei einem zu zwei Dritteln gesättigten Magnetismus (wie es der Fall sein müsste), sondern bereits beträchtlich früher statt. Immerhin liegt es nahe, die beiden obigen Formeln durch eine neue zu ersetzen, welche, für kleine sowohl als für grosse i übereinstimmend, für mittlere i den Beobachtungen sich besser anschliesst. Eine solche Function ist $\arctg i$; setzt man das Maximum des inducirten Magnetismus gleich 90, so erhält man daher:

$$M = \arctg i.$$

Diese Formel stimmt mit der von Müller¹⁾ und anderen zur Darstellung ihrer Magnetisirungsversuche angewandten überein; mit ihr wird:

$$ai = n(m + \arctg i),$$

also:

$$n = \frac{ai}{m + \arctg i},$$

wie oben gesetzt worden ist.

Wie die Betrachtung der Tabelle 1 zeigt, liefert die obige Formel bis zum Werthe $n=250$ Zahlen, welche mit den entsprechenden Beobachtungszahlen sehr gut, nämlich bis auf Bruchtheile eines Procentes übereinstimmen; während nun aber die berechnete Curve ihren durch die Gleichung $\frac{d^2 i}{dn^2} = 0$, also $i = \sqrt{\frac{a-57,3n}{a}}$ bestimmten Wendepunkt bei $n=210$ bereits überstiegen hat, steigt die beobachtete Curve noch bis etwa zu $n=320$ in wachsendem Grade, erhebt sich also über jene. Sind die hier stattfindenden Differenzen, in Anbetracht der grossen Veränderlichkeit von i bei kleinen Schwankungen von n an dieser Stelle auch nicht sehr erheblich, so sind sie doch deutlich genug, um die benutzte Formel als nicht streng richtig erscheinen zu lassen; um so mehr, als bald darauf beide Curven sich schneiden, und nun die beobachtete hinter der berech-

1) Pogg. Ann. LXXIX. p. 337. 1850.

neten um mehr als 10 Proc. zurückbleibt. In der That hat sich die in Rede stehende Formel $M = \arctg i$ schon mehrfach als ungenügend erwiesen; so bei den Versuchen von Weber, welche derselbe durch Zusammenstellung der beobachteten und der berechneten Curve graphisch dargestellt hat; nach Wiedemann und anderen nimmt sogar der Magnetismus, nachdem er eine Zeit lang der magnetisirenden Kraft proportional gewesen ist, zunächst schneller als diese und erst später langsamer zu; ein Verhalten, welches die hier besprochenen Differenzen, wie sie in Taf. IV Fig. 1 graphisch dargestellt sind, völlig aufklärt. Die richtige Formel dürfte, wie schon Wiedemann bemerkt hat, diejenige sein, welche, in den ersten Gliedern mit denen von Weber und von Müller übereinstimmend, den Widerstand berücksichtigte, welchen die Molecularmagnete bei ihren Schwingungen erfahren.

Die zuletzt ausgesprochene Vermuthung findet eine weitere Unterstützung in den Ergebnissen der Anwendung der theoretischen Formel auf diejenigen Versuche, welche wir bei grösseren Werthen von w , zunächst für $w = 9,21$, über die zwischen n und i stattfindenden Beziehungen angestellt haben. In Anbetracht der geringeren praktischen Wichtigkeit dieser Versuche verfahren wir hier summarischer und begnügten uns mit neun Werthepaaren, welche in Tabelle 2 zusammengestellt sind.

Tabelle 2. ($w = 9,21$).

Nr.	Dat.	n	i	$i_{\text{ber.}}$	δ
198	1. 7	800	0,1482	0,1733	-0,17
197	"	642	0,0831	0,0839	-0,009
199		490	0,04646	0,04636	+0,002
200	"	321	0,02549	0,02323	+0,088
201	7. 7	260	0,01842	0,01734	+0,059
202		167	0,01005	0,00996	+0,009
220	"	125	0,00703	0,00710	-0,009
221	"	84	0,00452	0,00456	-0,008
222	"	42	0,00220	0,00220	+0,000

Da hier der Maximalwerth von i nur etwa $\frac{1}{3}$ ist, so ist in der Reihe:

$$M = \arctg i = i(1 - \frac{1}{3}i^2 + \dots)$$

das erste Glied mindestens 150 mal so gross wie das zweite; es darf daher hier die einfachere Formel:

$$n = \frac{a i}{b - \frac{180}{\pi} i} \quad \text{oder} \quad i = \frac{\frac{\pi}{180} b n}{\frac{\pi}{180} a - n}$$

zu Grunde gelegt werden; und zwar findet man: $a=59500$, $b=2,97$. Die hiermit erzielte Uebereinstimmung ist zwischen $n=0$ und $n=250$ befriedigend, dann werden die berechneten Werthe wieder, wie in Tab. 1, zu klein und schliesslich zu gross; dabei sind die Differenzen nicht kleiner als dort; daraus folgt, dass das in der theoretischen Formel noch fehlende Glied von niederem Grade sein muss als die ihres geringen Betrages wegen unterdrückte dritte Potenz; man hat also statt i zu setzen $i(1 - ki)$, und das ist in der That die Form, in welcher Reibungsglieder stets auftreten.

Den beiden obigen Tabellen fügen wir noch eine dritte, für $w=66,8$ gültige, hinzu, bei welcher die berechneten Werthe aus der Formel:

$$i = \frac{\frac{\pi}{180} 2,52 n}{\frac{\pi}{180} 269400 - n}$$

hergeleitet sind.

Tabelle 3. ($w=66,8$).

Nr.	Dat.	n	i	$i_{\text{ber.}}$	δ
(203	1. 7	1144	0,01387	0,01416	-0,021)
204	"	876	0,01012	0,01008	+0,004
205	"	747	0,00846	0,00832	+0,017
206	"	601	0,00656	0,00647	+0,014
207	"	514	0,00537	0,00540	-0,006
208	"	352	0,00347	0,00355	-0,023
[209]	7. 7	228	0,00202	0,00223	[-0,104]
225]					
226	"	111	0,00087	0,00106]	[-0,219]

Die beiden letzten Reihen sind eingeklammert, weil hier die Ausschläge der Bussole schon zu klein waren, um Sicherheit zu gewähren.

Nimmt man nun aber auch die Gültigkeit der Formel an, so sieht man doch, dass die Constanten a und b mit w sich ändern. Um dieses Verhalten näher zu studiren, unternahmen wir nun den früheren ähnliche Beobachtungsreihen, bei denen n constant blieb, und i mit w variierte. Wie die obigen bei drei Werthen von w , so wurden diese bei drei Werthen von n , nämlich für $n = 824$, $n = 422$, $n = 167$ durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tab. 4 bis 6 zusammengestellt.

Tabelle 4.¹⁾ $n = 824$.

Nr.	Dat.	w	i	$E = iw$	$i_{\text{ber.}}$	δ	$E_{\text{ber.}}$	δ
172	26. 6	222,0	0,00218	0,484	0,00216	+0,009	—	—
171	"	132,9	0,00366	0,487	0,00368	-0,005	—	—
170	"	96,2	0,00524	0,504	0,00520	+0,008	—	—
169	"	66,7	0,00768	0,512	0,00772	-0,005	—	—
168	"	40,7	0,01274	0,518	0,0135	-0,059	0,527	-0,017
167	"	23,4	0,0243	0,558	—	—	0,581	-0,040
166	"	23,4	0,0243	0,558	—	—	0,581	-0,040
163	24. 6	10,64	0,0796	0,847	—	—	0,943	-0,113
162	"	7,08	0,454	3,207	—	—	3,242	-0,011
160	"	5,30	1,244	6,593	—	—	6,334	+0,038
158	"	4,38	1,683	7,370	—	—	7,261	+0,015
149	"	3,97	1,896	7,533	—	—	7,540	-0,001
157	"	3,64	2,131	7,753	—	—	7,840	-0,011
156	"	3,64	2,131	7,753	—	—	7,840	-0,011
150	"	3,08	2,592	7,981	—	—	8,320	-0,043
154	"	3,08	2,592	7,981	—	—	8,320	-0,043
155	"	3,08	2,592	7,981	—	—	8,320	-0,043
153	"	2,49	3,166	7,883	—	—	—	—
152	"	2,18	3,368	7,330	—	—	—	—
151	"	1,76	3,408	5,997	—	—	8,86	-0,48

1) Die letzten sechs Reihen sind eingeklammert, weil bei diesen Versuchen offenbar die infolge des starken Stromes auftretende elektrische Reaction der Gramme'schen Maschine ein Gleiten des Riemens veranlasste. Im analogen Falle hat übrigens auch Herwig eine Zunahme von E mit wachsendem w gefunden.

Tabelle 5.

 $n = 422.$

Nr.	Dat.	w	i	E	$i_{\text{ber.}}$	δ	$E_{\text{ber.}}$	δ
173	26. 6	222,0	0,00095	0,211	0,00095	0	—	—
174	"	96,3	0,00227	0,220	0,00224	+0,014	—	—
175	"	47,7	0,00471	0,225	0,00473	-0,004	—	—
176	"	26,8	0,00873	0,234	0,00880	-0,008	—	—
181	1. 7	20,3	0,01221	0,248	0,01225	-0,003	—	—
182	"	10,58	0,03077	0,326	0,03021	+0,018	0,314	+0,043
183	"	7,50	0,04572	0,345	0,04910	-0,72	0,353	-0,023
184	"	3,89	0,2253	0,879	—	—	0,961	-0,092
185	"	3,51	0,577	2,025	—	—	2,012	+0,006
186	"	3,31	0,672	2,223	—	—	2,242	-0,009
187	"	2,92	0,965	2,819	—	—	2,838	-0,007
188	"	2,34	1,588	3,717	—	—	3,708	+0,003
189	"	2,10	1,853	3,890	—	—	3,903	-0,003
190	"	1,73	2,348	4,062	—	—	4,231	-0,041

Tabelle 6.

 $n = 167.$ (Handbetrieb).

Nr.	Dat.	w	i	E	$i_{\text{ber.}}$	δ	$E_{\text{ber.}}$	δ
219	7. 7	90,4	0,00092	0,0832	0,00093	-0,011	—	—
218	"	41,3	0,00212	0,0877	0,00209	+0,014	—	—
217	"	20,3	0,00436	0,0885	0,00435	+0,002	—	—
216	"	14,91	0,00602	0,0896	0,00602	0	—	—
215	"	8,38	0,01126	0,0942	0,01121	+0,004	—	—
214	"	5,15	0,01955	0,1005	0,02038	-0,043	0,1022	-0,017
213	"	3,87	0,02636	0,1020	—	—	0,1084	-0,063
212	"	2,89	0,0428	0,1236	—	—	0,1230	+0,005
211	"	2,30	0,0626	0,144	—	—	0,147	-0,021
210	"	1,68	0,1192	0,201	—	—	0,207	-0,029

In diesen Tabellen sind die Werthe von E durch Multiplication von w in i entstanden; E ist also das, was man bei einem galvanischen Elemente die electromotorische Kraft nennt. Diese Grösse ist aber hier, wie die Tabellen zeigen, keine Constante; sie ist es freilich für grosse w annähernd, nämlich:

für $n = 824$ zwischen $w = \infty$ und $w = 30$: E etwa $= 0,5$

„ $n = 422$ „ „ „ $w = 20$: E „ $= 0,22$

„ $n = 167$ „ „ „ $w = 15$: E „ $= 0,085.$

Sie ist es auch für kleine w einigermaßen, wenigstens wenn der Strom dabei noch stark ist, nämlich für $n = 824$

unterhalb $w = 4$ ($E = 7,8$), für $n = 422$ unterhalb $w = 2,3$ ($E = 4$ etwa); aber diese beiden constanten Werthe sind völlig voneinander verschieden, und dazwischen liegt ein Gebiet, wo E mit abnehmendem w rapide zunimmt; am rapidesten ist diese Zunahme für $n = 824$ zwischen $w = 10$ und $w = 5$, für $n = 422$ zwischen $w = 7$ und $w = 2,5$, für $n = 167$ von $w = 3$ über die Versuchsgrenzen hinaus. Dieses Verhalten erklärt sich ohne weiteres aus der Formel:

$$a_0 i = \frac{n}{w} (m + \operatorname{arc} \operatorname{tg} i),$$

welche man aus der obigen erhält, wenn man, dem Ohm'schen Gesetze gemäss, die dortige, von n unabhängige Grösse $a = a_0 w$ setzt. In der That erhält man hieraus für kleine i :

$$i = \frac{mn}{a_0 w - 57,3 n};$$

diese Formel liefert die mit $i_{\text{ber.}}$ bezeichneten Werthe, wenn man:

für Tab. 4: $m = 4,1$, $a_0 = 7300$,

„ „ 5: $m = 3,4$, $a_0 = 7000$,

„ „ 6: $m = 4,5$, $a_0 = 9000$,

setzt. Für grössere i erhält man:

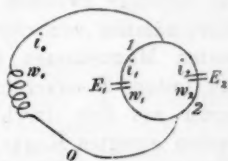
$$iw = E = \frac{n(m + \operatorname{arc} \operatorname{tg} i)}{a_0},$$

und hieraus die Werthe $E_{\text{ber.}}$, theilweise mit etwas veränderten Werthen von m und a_0 (m resp. = 3,8, 3,4, 4,4 und a_0 resp. 7200, 7000, 9000).

Es sind jedoch auch hier die Abweichungen zwischen berechneten und beobachteten Werthen nicht zu verkennen. Erstens erweist sich die Formel in ihrer Functionalgestalt als unzulänglich; nach ihr müssten die $i_{\text{ber.}}$ bis zu $i = 0,17$ mit den i bis auf ein Procent übereinstimmen, da $\frac{1}{3} \times (0,17)^2 = 0,01$ ist; es hört aber in allen drei Tabellen die Uebereinstimmung schon beträchtlich früher, bei $i = 0,01$ bis $i = 0,04$ auf, was wieder auf die Vernachlässigung des Reibungsgliedes hindeutet. Zweitens aber sind die Grössen a und b nicht völlig constant, wie sie

es sein sollten. Es ist zwar mit variirendem n keine Gesetzmässigkeit in den Schwankungen von σ_0 und m zu erkennen; wohl aber, wie schon oben hervorgehoben, bei variirendem w ; es war nämlich für $w = 1,78, 9,21$ und $66,8$ resp. $m = 3, 2,97$ und $2,52$, also regelmässig abnehmend; ferner war a resp. $= 13500, 59500$ und $269\,400$ also a_0 resp. $= 7580, 6460$ und 4030 , also ebenfalls stetig, abnehmend; ferner mussten auch den letzten drei Tabellen für die vollständige Formel kleinere oder ebenso grosse Werthe von a_0 und m zu Grunde gelegt werden, wie für die angenäherte. Alles das fordert auf, den Vorgang, welcher den besprochenen Versuchen zu Grunde liegt, näher zu untersuchen.

Vor allen Dingen ist zu fragen, ob nicht der Umstand, dass der beobachtete Strom ein Zweigstrom ist, einen Einfluss auf die zwischen w und i stattfindende Beziehung ausübe. Es seien E_1 und E_2 zwei constante electromotorische Kräfte in den Zweigen 1 und 2 mit den constanten Widerständen w_1 und w_2 und den Stromstärken i_1 und i_2 , ferner im Zweige O der variable Widerstand w_0 , die Stromstärke i_0 . Dann ist nach Kirchhoff:



$$i_0 w_0 + i_1 w_1 = E_1, \quad i_0 w_0 + i_2 w_2 = E_2, \quad i_0 = i_1 + i_2.$$

Folglich:
$$i_0 = \frac{E_1}{w_1} + \frac{E_2}{w_2} - i_0 w_0 \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \right),$$

also:
$$i_0 = \frac{\frac{E_1}{w_1} + \frac{E_2}{w_2}}{1 + w_0 \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \right)}.$$

Im Zähler steht eine constante Grösse; im Nenner soll der Gesamtwiderstand w :

$$w = w_0 + \frac{1}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}}$$

eingeführt, und statt i_0 einfach i geschrieben werden; man findet dann:

$$i = \frac{\frac{E_1}{w_1} + \frac{E_2}{w_2}}{w \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \right)} = \frac{\text{const.}}{w},$$

d. h. die Stromstärke im Zweigstrom ist dem Gesamtwiderstande proportional, welche dieser Zweigstrom zu überwinden hat. Bei der Gramme'schen Maschine ist nun freilich E nicht constant; das setzen aber die Kirchhoff'schen Formeln auch nicht voraus; sie setzen nur voraus, dass bei allen Aenderungen von i und w die Grösse E stets ihr Product darstelle, und das ist nach der obigen Definition von E in der That der Fall. Die Verzweigung des Stromes hat also auf die zwischen w und i stattfindende Beziehung keinen Einfluss.

Wohl aber ist ein solcher Einfluss auf die zwischen M und w gültige Beziehung, und damit auch mittelbar auf diejenige zwischen w und i vorhanden. Der Strom i rührt nämlich von vier Kräften her: von den beiden remanenten Magnetismen in dem rotirenden Ringe und in den festen Eisenkernen, welche die Summe m ergeben; ferner von dem durch den Strom i in den festen Eisenkernen erregten Magnetismus und schliesslich von dem im Eisenringe erregten Magnetismus; da der letztere nun nicht von dem Strome i , sondern vom Strome i_1 erregt wird, so dürfen diese beiden Wirkungen nicht einfach addirt werden. Nun ist freilich der Eisenring erstens aus lauter dünnen Drähten zusammengesetzt; ferner ist er dauernd Wechselströmen ausgesetzt; er wird daher nur einen vergleichsweise schwachen Magnetismus annehmen (wenn derselbe auch in den ersten Secunden der Erscheinung überwiegen mag); dass derselbe aber nicht gänzlich vernachlässigt werden darf, zeigt der Umstand, dass im Obigen einige Schwankungen beobachteter Grössen unerklärt blieben. Die vollständige Formel wird hiernach:

$$a_0 i = \frac{n}{w} (m + \text{arc tg } i + k \text{ arc tg } i_1).$$

Nun ändert sich i umgekehrt proportional mit w , dagegen ebenfalls nach dem erwähnten Satze i_1 umgekehrt propor-

tional mit $w_1 + \frac{1}{\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_2}}$; d. h. es ist: $i_1 = \frac{w i}{w_1 + \frac{1}{\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_2}}}$,
 oder, wenn man $w_1 = w_2$ setzt:

$$i_1 = \frac{i}{4w_1} (2w + w_1) = \frac{i}{\lambda} (2w + \mu),$$

wo λ und μ zwei weitere Constanten sind. Es wird daher, da k klein und λ meist gross ist, angenähert:

$$a_0 i = \frac{n}{w} \left(m + \left(1 + \frac{k}{\lambda} (2w + \mu) \arctg i \right) \right)$$

oder:

$$n = \frac{a_0 w \left(\frac{1}{\alpha + \beta w} \right)}{m \left(\frac{1}{\alpha + \beta w} \right) + \arctg i}.$$

Hierdurch erklärt sich die Abnahme der beiden, oben mit a_0 und m bezeichneten Constanten bei wachsendem w ; es folgt ferner, dass das Verhältniss $\frac{a_0}{m}$ dabei constant bleiben muss, und das ist annähernd der Fall.

Erst jetzt sind wir im Stande, über das Verhältniss des remanenten zum inducirten Magnetismus, wie es bei unserer Maschine stattfindet, einen Schluss zu ziehen; das Maximum des letztern stellt sich durch die Zahl 90, der erstere durch den grössten Werth, d. h. durch die obere Grenze von m dar; diese obere Grenze liegt zwischen 3 und 4; es kann also der inducirte Magnetismus den zwanzig- bis dreissigfachen Betrag des durchschnittlich remanenten Magnetismus betragen.

Es gibt noch zwei andere Grössen, deren Verhältniss nahezu dasselbe sein muss wie dasjenige zwischen inducirtem und remanentem Magnetismus, nämlich das Maximum und das Minimum der electromotorischen Kraft der Gramme'schen Maschine für ein beliebiges n bei variirendem w . Es ergab sich nun:

$$\begin{aligned} \text{für } n = 824 : E_{\max.} &= 8,86, & E_{\min.} &= 0,48 \\ \text{,, } n = 422 : \text{,,} &= 4,06, & \text{,,} &= 0,21 \\ \text{,, } n = 167 : \text{,,} &> 0,20, & \text{,,} &= 0,08. \end{aligned}$$

Im letzten Falle wurde die volle electromotorische Kraft gar nicht mehr erreicht. Die beiden ersten Reihen ergeben resp. $E_{\max.} : E_{\min.} = 18,5$ und $= 19,3$, also im Mittel $= 18,9$. Bei sehr kleinem Widerstande ist also die electromotorische Kraft der Gramme'schen Maschine etwa 19mal so gross wie bei sehr grossem Widerstande.

Um diese relative Bestimmung zu einer absoluten zu vervollständigen, schickten wir den Strom eines Grove'schen Elements, zur Sicherheit bei verschiedenen Widerständen der Schliessung, durch die zu den Versuchen benutzte Tangentenbussole. Dabei ergab sich, dass der Strom 1 Grove bei $w = 1$ S.-E. den Werth 0,263 hatte. Man muss also die Grösse E noch mit $\frac{1}{0,263}$, d. h. mit 3,804 multipliciren, um sie in Grove'schen Elementen ausgedrückt zu erhalten. Hiernach ist die Kraft unserer Maschine bei grossem n für kleine w etwa gleich 33 Grove's (genau so gross wie diejenige der anscheinend ganz anders construirten Magleichschine von Herwig), für grosse w dagegen kaum noch 2 Grove's; das letztere Ergebniss wurde auch durch vergleichende Versuche mit dem Voltameter bestätigt. Was dagegen die von Herwig und auch von Hagenbach constatirte magnetische Sättigung der Maschine durch den Strom von $4,4 \frac{\text{Grove}}{\text{Siem.}}$ betrifft, so ergibt sich eine solche hier nicht oder doch erst später; zwar liegt der Wendepunkt der zwischen n und i gültigen Curve bei $n = 320$, also i (vgl. die Schlusstabelle) $= 5$ Grove's etwa; aber selbst für grosse n und kleine w nimmt die electromotorische Kraft, wenn auch langsam, zu. Während ferner Herwig fand, dass bis zu $w = 8$ die Maschine zur vollen Kraftentfaltung gelangt, zeigen die Tabellen 1 bis 3, dass $E_{\max.}$ von 5 durch 1,4 auf 0,9 sinkt, wenn w von 1,78 durch 9,21 auf 66,8 steigt; wie die weiteren Tabellen 4 bis 6 zeigen, ist schon für $w = 2$ $E_{\max.}$ beträchtlich kleiner als für $w = 1,78$. Schliesslich behält unsere Maschine im Verhältnisse zu Herwig's einen vier- bis fünfmal schwächeren Magnetismus dauernd zurück. Es geht dies daraus hervor,

dass, wie aus der Gleichheit der maximalen electromotorischen Kräfte folgt, der maximale inducirte Magnetismus bei beiden gleich, der durchschnittlich remanente Magnetismus aber dort $\frac{1}{3}$, hier $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{30}$ des erstern ist.

Ueber die Beziehung zwischen n und i liegen bereits Versuche von Hagenbach vor; die drei Reihen dieses Beobachters, welche sich von $n = 250$ bis $n = 1500$ erstrecken, entsprechen freilich nicht sehr verschiedenen Widerständen, nämlich $w = 1,88, 2,38$ und $3,88$; nach des Verfassers Angabe ergeben sie nahezu Proportionalität zwischen n und i , d. h. die Curve soll, abgesehen von einer schwachen Concavität nach unten, geradlinig sein; geht man aber auf die vorliegenden Tabellen ein, so findet man, dass i erst rascher als n und erst später langsamer als dieses steigt. Dieses Verhalten stimmt mit dem von uns beobachteten vollständig überein; nur ist die Abweichung von der Proportionalität bei uns auf einem beschränkten Stücke der Curve unvergleichlich grösser, einfach aus dem Grunde, weil Hagenbach, der nicht unter $n = 250$ heruntergegangen ist, den ersten sanft ansteigenden Theil der Curve so gut wie gar nicht beobachtet hat.¹⁾

Zum Schlusse stellen wir die Zahlenergebnisse unserer Versuche in einer Tabelle zusammen, welche für jedes Werthepaar von n und w das zugehörige i in Vielfachen von $1 \frac{\text{Grove}}{\text{Siemens}}$ angibt, und verweisen auf die graphischen Darstellungen auf Taf. IV; von diesen gibt Fig. 1, wie bereits erwähnt, oben die für $w = 1,78$ beobachtete und berechnete Curve zwischen n und i , unten die entsprechenden für $w = 9,21$ und $w = 66,8$; in Fig. 2 sind die beiden letzteren, dort fast als geradlinig erscheinenden, vertical vergrössert dargestellt, erstere 20mal, letztere 200mal. Man sieht, dass beide Curven nur dem ersten, nach oben concaven Theile der für $w = 1,78$ construirten Curve entsprechen, und dass für $w = 66,8$ schon fast völlige Propor-

1) Hrn. Hagenbach's vollständige Curve stimmt nach seiner privaten Angabe völlig mit der unsrigen überein.

tionalität bis zu $n = 1100$ herrscht. Taf. IV Fig. 3 gibt für $n = 824$ die Stromstärke als Function des Widerstandes; die Abweichung dieser Curve von einer gleichseitigen Hyperbel (Ohm'sches Gesetz) erkennt man in der verschiedenen raschen Annäherung der beiden Zweige an ihre Asymptoten; um diese Abweichung noch deutlicher zu machen und auch für $n = 422$ und $n = 167$ (Tabelle 5 und 6) zu zeigen, gibt Taf. IV Fig. 4 die electromotorische Kraft E als Function von w .

Tabelle, darstellend i (in $\frac{\text{Grove}}{\text{Siemens}}$) als Function von n
(horizontal) und w (vertical).

	20	40	70	100	150	200	250	300	400	500	600	700	800	900
1,75	0,0221	0,0475	0,0962	0,160	0,346	1,027	2,738	4,64	7,84	10,46	12,78	14,30	16,05	17,5
2	0,0190	0,0418	0,0776	0,127	0,236	0,87	2,26	4,10	6,92	9,94	10,82	12,50	14,12	—
2,25	0,0171	0,0345	0,069	1,09	0,175	0,62	1,66	2,99	6,91	8,51	10,21	11,84	12,89	—
2,5	0,0152	0,0314	0,059	0,99	0,156	0,54	1,39	2,52	5,10	7,80	9,53	10,70	11,94	—
2,75	0,0137	0,029	0,055	0,90	0,137	0,50	1,23	2 11	4,26	6,92	8,41	9,55	11,03	—
3	0,0125	0,0259	0,0536	0,0837	0,122	0,47	1,08	1,77	3,54	5,87	7,70	8,98	10,12	—
3,5	0,0103	0,0209	0,044	0,068	0,0947	0,38	0,74	1,10	2,13	3,58	5,51	7,00	8,52	—
4	0,0087	0,0178	0,035	0,050	0,0730	0,159	0,296	0,435	0,791	1,58	3,40	5,29	7,04	—
5	0,0072	0,0144	0,0259	0,0373	0,0574	0,0913	0,152	0,221	0,383	1,103	2,74	3,88	5,06	—
7	0,0053	0,0110	0,0196	0,028	0,0418	0,061	0,092	0,135	0,228	0,51	0,82	1,14	1,37	—
10	0,0034	0,0072	0,0133	0,0194	0,0289	0,0361	0,0647	0,0837	0,121	0,224	0,392	0,430	0,466	—
20	0,0019	0,0037	0,0064	0,0092	0,0129	0,017	0,0245	0,0302	0,0418	0,0560	0,0711	0,850	0,107	—
50	0,0008	0,0016	0,0028	0,0036	0,0053	0,0080	0,0099	0,0133	0,0175	0,0270	0,0331	0,0372	0,0418	—
200	0,0002	0,0004	0,0007	0,0009	0,0012	0,0016	0,0020	0,0028	0,0034	0,0046	0,0059	0,0074	0,0091	—

Breslau, 1. Aug. 1879.

XI. Beschreibung einiger mit Electricität hoher Spannung mittelst des Telephons angestellter Versuche; von Leonhard Weber.

Die im Folgenden beschriebenen Versuche erscheinen mir zwar in ihrer augenblicklichen Form noch nicht völlig geeignet, gewisse unten anzudeutende Folgerungen mit Strenge daraus zu ziehen; dennoch glaube ich, dieselben mittheilen zu sollen, da sie 1) an und für sich ein gewisses experimentelles Interesse haben, 2) dazu dienen können, eine Reihe von Fehlerquellen bei ähnlichen Untersuchungen anderer Physiker zu verhüten, 3) einen neuen Beweis geben für die Brauchbarkeit des Telephons zur Erkennung schwacher periodischer Ladungen eines Leiters der Electricität und 4) dazu dienen können, diejenigen von Helmholtz, Herwig, Koosen¹⁾ u. a. ausgehenden Vorstellungen experimentell zu erläutern, welche man sich über die electrischen Bewegungen innerhalb eines Inductionskreises und eines in denselben eingeschalteten Electrolyten zu bilden hat.

Verbindet man die beiden von den Klemmschrauben eines Telephons kommenden Drähte mit den Stellen *A* und *E* eines oder zweier Leiter, so wird in der Telephonleitung so oft eine Bewegung von Electricität eintreten, als die Werthe der in *A* und *E* vorhandenen electrostatischen Potentiale verschieden sind. Ist *E* beispielsweise ein Punkt der Erde und *A* ein solcher eines Leiters der Electricität, so wird bei periodischen, schnell aufeinander folgenden Aenderungen des Potentials in *A* auch eine periodische, in gleichem Tempo erfolgende Electricitätsbewegung innerhalb der telephonischen Leitung vorhanden sein, die bei genügender Schnelligkeit und Stärke als ein im Telephon gehörter Ton wahrgenommen wird.

Solche in schnellem Tempo erfolgende periodische

1) Pogg. Ann. CL. p. 61. p. 483. 1873. Wied. Ann. II. p. 566. 1877.

Ladungen wurden bei den folgenden Versuchen entweder durch eine Influenzelectrisirmaschine oder durch einen Inductionsapparat hervorgerufen. Bei Anwendung der erstern waren dann die Conductoren so nahe gestellt, dass ein schneller Funkenwechsel erfolgte, oder es war in die von dem einen Conductor führende Leitung ein Funkenmikrometer mit eng gestellten Spitzen eingeschaltet, während der andere Conductor zur Erde abgeleitet war. Der angewandte Inductor war ein kleiner Siemens'scher Apparat, dessen Inductionsrolle, aus vier Abtheilungen bestehend, einen Widerstand von ca. 3000 S.-E. besass. Der primäre Stromkreis wurde durch eine aus sechs Elementen bestehende Tauchbatterie gespeist. Die Platten wurden nur gerade so weit eingetaucht, bis die Feder des Interruptors zu spielen anfang. Als Reagens auf die durch den einen oder andern Apparat erzeugten periodischen Ladungen diente ein gewöhnliches Telephon. Die von den Klemmschrauben desselben wegführenden beiden Kupferdrähte und speciell ihre freien Enden seien mit *a* und *c* bezeichnet. Die Höhe des im Telephon gehörten Tones entsprach immer der Höhe des direct von der Influenzmaschine oder dem Neef'schen Hammer vernommenen Tones. Die wesentlich der Beobachtung unterliegende Stärke werde ich durch folgende Bezeichnungen angeben. Der Ton sei genannt: sehr stark, wenn derselbe im ganzen Zimmer hörbar; stark, wenn derselbe schon zu hören war, ohne dass das Telephon fest ans Ohr gedrückt wurde; mässig, wenn das Telephon fest ans Ohr gelegt werden musste, um einen kräftigen Ton zu hören; schwach, wenn unter derselben Bedingung nur ein schwacher Ton zu hören war; sehr schwach, wenn eine gespannte Aufmerksamkeit dazu gehörte, um noch einen Ton zu hören.

Noch sei bemerkt, dass akustische Täuschungen überall, wo es nöthig schien, dadurch ausgeschlossen wurden, dass die zum Telephon führende Leitung in ein zweites Zimmer führte, in welchem die Influenzmaschine oder der Neef'sche Hammer nicht direct gehört werden konnten. Die

hierbei erforderliche Assistenz wurde mir von Hrn. stud. B. Karsten bereitwilligst geleistet.

Waren zwei Ableitungsstellen zur Erde nothwendig, so wurden dazu die Wasserleitung und eine am Institute befindliche Blitzableitung benutzt.

1. Versuch. Der Draht e war zur Erde geleitet; a wurde an eine beliebige Stelle eines der genäherten Conductoren der Influenzmaschine gesetzt. Der gehörte Ton war sehr stark.

2. Versuch. Wurde der Draht e bei derselben Anordnung ganz beseitigt, so hörte man noch einen mässigen bis starken Ton. Es genügte also zur Ableitung der hier auftretenden hochgespannten Electricität die Leitungsfähigkeit der aus trockenem Tannenholze bestehenden, mit der Hand gehaltenen Holzfassung des Telephons.

3. Versuch. Ein Conductor der Influenzmaschine war zur Erde geleitet; der andere war mit Einschaltung eines Funkenmikrometers zu dem einen Ende einer ca. 1 m langen, 5 mm weiten, mit destillirtem Wasser gefüllten Röhre abgeleitet. In das andere Ende der Röhre wurde Draht a getaucht, während e zur Erde abgeleitet war. Der Ton war mässig bis stark.

4. Versuch. Bei derselben Anordnung wurde die mit Wasser gefüllte Röhre ersetzt durch eine mattgeschliffene, schwach angefeuchtete Glastafel von 77 cm Länge und 97 cm Breite. Die beiden Ansatzstellen des Drahtes a und des vom Funkenmikrometer kommenden Drahtes lagen in diagonal gegenüberliegenden Ecken. Der Ton war mässig bis stark.

Wurde in den Versuchen 3 und 4 der Draht e ganz beseitigt, so war der Ton schwach.

Dieselben Resultate ergaben sich, wenn der Inductionsapparat an die Stelle der Influenzmaschine gesetzt wurde.

5. Versuch. Die beiden Endklemmen des Inductionsdrahtes am Inductor seien mit P_1 und P_2 bezeichnet. Es wurde entweder P_1 oder P_2 zur Erde abgeleitet. Der

Draht a wurde resp. an P_2 oder P_1 angesetzt. Draht e war zur Erde abgeleitet. Der Ton war sehr stark.

Entfernte man die Platte des Telephons, so war, wie bereits von G. Karsten¹⁾ mitgetheilt, ein mässiger Ton hörbar.

Wurde nach Einsetzung der Telephonplatte der Draht e beseitigt, so war noch ein starker Ton hörbar.

6. Versuch. Der Pol P_2 war nicht abgeleitet; vom Pole P_1 war ein ca. 2 m langer Draht abgeleitet, dessen freies Ende p_1 in ein Stativ eingeklemmt wurde; das freie Ende a des vom Telephon kommenden Drahtes wurde dem Drahte p_1 frei gegenüber gehalten; Draht e war zur Erde abgeleitet. Die Stärke des gehörten Tones variierte mit der Entfernung der Endpunkte p_1 und a . Betrug diese Entfernung nur einige Millimeter, so war der Ton sehr stark. Bei einer Entfernung von 1,7 m war noch ein sehr schwacher Ton zu hören.

Die Richtung des Drahtes p_1 sowie des Drahtes a war rechtwinkelig zur Axe der Inductionsrollen.

7. Versuch. Der Pol P_2 war zur Erde (Wasserleitung) abgeleitet. Ich stellte mich, das Telephon mit der Hand ans Ohr haltend, in etwa 2 m Entfernung vom Inductionsapparate in der Verlängerung der Axe der Rollen auf nach der Seite des Poles P_1 hin. Das Telephon hatte nur durch den zur Erde (Blitzableitung) geführten Draht e eine Ableitung. Berührte ich sodann mit einem Finger der das Telephon haltenden Hand die freie Klemmschraube des letztern, so war ein schwacher Ton hörbar, der sich schnell verstärkte, sobald ich den andern Arm zum Inductor hinstreckte. Das Telephon selbst wurde senkrecht gegen die Axe der Inductionsrollen gehalten mit Rücksicht auf den Versuch 9.

8. Versuch. In dem einen Beobachtungszimmer wurde der Pol P_2 zur Wasserleitung abgeleitet. In dem zweiten Beobachtungszimmer, in welches ein anderer Zweig

1) Telefonsirene; Schrift d. naturw. Ver. Kiel 1879. Beibl. III. p. 531.

der Wasserleitung führte, war das Telephon, dessen Draht e mit dieser Wasserleitung verbunden war; Draht a wurde entfernt. Berührte ich die freie Klemmschraube mit einem Finger, so war ein mässiger Ton vorhanden.

9. Versuch. Hält man in der Nähe des Inductors (etwa 1 m entfernt) ein Telephon ohne jeden Zuleitungsdraht, so hört man je nach der Entfernung einen schwachen bis sehr starken Ton infolge magnetischer Induction, sobald die Axe des Telephons nicht senkrecht gegen diejenige der Inductionsrollen ist.

10. Versuch. Zwei Drähte von genau gleicher Länge (etwa 2 m) wurden mit einem Ende zusammengedreht und gemeinsam in die eine Polklemme des Inductors gesetzt. Die anderen Enden führten zu den beiden Klemmschrauben des Telephons. Der Ton war mässig. Derselbe verschwand, sobald eine der Telephonklemmen mit der Hand berührt wurde.

Der Erfolg war genau derselbe, wenn die zusammengedrehten Enden an eine beliebige Stelle der Conductoren der Influenzmaschine gesetzt wurden.

11. Versuch. An die Pole P_1 und P_2 des Inductors wurde je ein Draht angesetzt, deren freie Enden p_1 und p_2 in einer Entfernung von etwa 40 cm symmetrisch zum Inductor durch isolirte Stative gehalten wurden. Vom Telephon war Draht e zur Erde geleitet. Das freie Ende des Drahtes a wurde zwischen p_1 und p_2 immer rechtwinkelig zur Verbindungslinie derselben hin und her bewegt.


In der Nähe von p_1 oder p_2 war der Ton stark; rückte a ungefähr in die Mitte von p_1 und p_2 , so wurde der Ton sehr schwach.

12. Versuch. Die von P_1 und P_2 kommenden Drahtenden p_1 und p_2 wurden in die diagonal gegenüberliegenden Ecken einer 38 cm langen und 32 cm breiten Glasschale getaucht, welche mit destillirtem Wasser gefüllt war. Vom Telephon führte Draht e zur Erde. Das Ende a wurde bis auf etwa 5 mm den Enden p_1 oder p_2 genähert,

ohne in Berührung mit dem Wasser zu treten. Es war kein Ton hörbar.

13. Versuch. Bei derselben Anordnung des vorigen Versuches wurde das Ende a in das Wasser der Glasschale getaucht. Der Ton war mässig. Derselbe wurde stark, wenn a in die Nähe von p_1 oder p_2 gebracht wurde. Wurde dagegen a ungefähr in die Mitte zwischen p_1 und p_2 etwas näher nach p_1 herangehalten, so wurde der Ton plötzlich sehr schwach oder schien mitunter ganz zu verschwinden. Die so bezeichnete Stelle in der Glasschale liess sich bis auf einen Spielraum von 1—2 cm genau feststellen. Ich werde diese Stelle im Inductionskreise als den neutralen Punkt bezeichnen.

14. Versuch. Wurde p_1 so weit aus dem Wasser gezogen, dass seine Spitze eben die Wasseroberfläche berührte, so rückte der neutrale Punkt näher nach p_1 heran.

15. Versuch. Um die Lage des neutralen Punktes bei einer wesentlich nach einer Dimension ausgedehnten Wassermasse zu untersuchen, wurde der vorige Versuch in folgender Weise abgeändert. Zwei Glasröhren R_1 und R_2 von der gleichmässigen Weite von 5,3 mm und der Länge von 80 cm wurden  förmig gebogen, mit destillirtem Wasser gefüllt und durch zwei Stative horizontal, symmetrisch und rechtwinkelig zur Axe des Inductors aufgestellt. Die dem Inductor zunächst gelegenen Enden dieser Röhren seien r_1 und r_2 ; die abgewandten ϱ_1 und ϱ_2 . Es wurden durch zwei symmetrisch gebogene Drähte p_1 und p_2 P_1 mit r_1 und P_2 mit r_2 verbunden. Dabei tauchten die Enden p_1 und p_2 bis zur Biegung der Röhre etwa 2—3 cm ins Wasser. Es wurde ferner das Ende a des Telephondrahtes mit zwei gabelförmig angesetzten dünnen und blank geputzten Kupferdrähten α_1 und α_2 versehen; α_1 wurde in das Ende ϱ_1 der Röhre R_1 , α_2 in das Ende ϱ_2 der Röhre R_2 getaucht. Endlich war Draht e des Telephons zur Erde abgeleitet. (Gegenüber dem Versuche 13 war hier also nur die mit Wasser ge-

füllte Glasschale ersetzt durch die in den beiden Röhren vorhandene Wassersäule).

Der Ton war mässig, wenn beide Drähte α_1 und α_2 gleich weit in ϱ_1 und ϱ_2 eintauchten; derselbe wurde sehr schwach, wenn α_1 etwa bis zu 40 cm Entfernung dem Ende p_1 genähert wurde, während α_2 , bis zur Biegung des Röhrenendes ϱ_2 eintauchend, von p_2 die Entfernung von 70 cm hatte.

Die als Verbindungsstück zwischen ϱ_1 und ϱ_2 aufgefassten beiden Drähte α_1 und α_2 spielen in diesem Versuche offenbar genau dieselbe Rolle wie das in die Glasschale des Versuches 13 getauchte Drahtende a . Die Verschiebung der Endpunkte α_1 und α_2 gegen p_1 und p_2 entspricht der Verschiebung des Punktes a in der Glasschale. Trat also bei den Entfernungen von resp. 40 und 70 cm ein fast vollständiges Verschwinden des Tones ein, so würde dies als die neutrale Stellung der Drähte α_1 und α_2 zu bezeichnen sein.

16. Versuch. Bei dem Versuche 15 zeigte sich der Pol P_1 als der schwächer wirkende, da die neutrale Stelle ihm am nächsten lag. Durch successive Vertauschung der Röhren R_1 und R_2 , sowie durch Umkehrung der Stromrichtung des primären Stromes ergab sich, dass die grössere Nähe der neutralen Stelle nach P_1 zu nicht einer verschiedenen Leitungsfähigkeit des in den beiden Röhren vorhandenen Wassers oder einer Bevorzugung einer Electricitätsart zuzuschreiben, sondern lediglich eine Eigentümlichkeit des Inductors sei, deren genauere Ergründung wegen der Unzugänglichkeit der Windungen des primären sowohl, wie des secundären Stromes nicht möglich war.

17. Versuch. In der Anordnung des Versuches 15 blieb alles ungeändert. Es wurde aber an den Pol P_2 ausser dem nach r_2 führenden Drahte p_2 noch ein anderer Draht angesetzt, welcher zur innern Belegung einer sehr kleinen Leydener Flasche führte. Die äussere Belegung der letztern war zur Erde abgeleitet. Hierdurch wurde die neutrale Stelle in der Weise verschoben, dass α_2 bis

auf etwa 5 mm dem Drahte p_2 genähert werden musste, während α_1 in derselben Entfernung von 40 cm verblieb.

Eine ähnliche Wirkung wurde erzielt, wenn die Leydener Flasche durch zwei 25 qcm grosse, durch ein Glimmerblatt isolirte Platten ersetzt wurde.

18. Versuch. In den Versuchen 15—17 machte es für die Stärke des gehörten Tones keinen Unterschied, wenn die Drähte α_1 und α_2 mit der Hand berührt wurden.

19. Versuch. Die Verbindungen zwischen P_1 und r_1 , sowie zwischen ρ_1 , ρ_2 und dem Telephon waren wie in Versuch 15 hergestellt. Dagegen war zwischen P_2 und r_2 das als Condensator wirkende Plattenpaar des Versuches 17 in der Weise eingeschaltet, dass die eine Platte mit dem Pole P_2 und die andere mit r_2 durch einen Draht verbunden war. Hierdurch trat eine Verschiebung der neutralen Stelle ein, dergestalt, dass α_1 in der Entfernung von 40 cm blieb, während α_2 in die Entfernung von 33 cm gebracht werden musste.

20. Versuch. Anstatt des einen Paares von Platten wurden successive noch vier andere Paare cascadenförmig zwischen P_1 und r_1 eingeschaltet. Blieb dabei α_1 in dem Abstand von 40 cm, so war die neutrale Stellung vorhanden, wenn α_2 die Abstände hatte von:

70, 33, 27, 25, 24, 22 cm,

bei Einschaltung von resp.:

0, 1, 2, 3, 4, 5 Plattenpaaren.

21. Versuch. Sobald zwischen P_2 und r_2 die Condensatorplatten eingeschaltet waren, trat bei Berührung des Drahtes α_2 mit der Hand eine Verstärkung des Tones ein.

22. Versuch. Bei der Anordnung des Versuches 15 wurde das destillirte Wasser in der Röhre R_1 durch sehr schwach mit Schwefelsäure angesäuertes Wasser ersetzt. Die neutrale Stelle ergab sich, wenn α_1 in die Entfernung von 70 cm und α_2 fast bis zu unmittelbarer Berührung mit dem Drahte p_2 gebracht wurde.

Bezüglich der vorstehend beschriebenen Versuche glaube ich mich auf folgende wenige Bemerkungen beschränken zu können.

a) Die Versuche 1—5 demonstrieren in bequemer Weise die magnetische Inductionsfähigkeit abfliessender Reibungselectricität.

b) Im besondern zeigen die Versuche 3 und 4 eine gewisse Unempfindlichkeit solcher electricischen Ströme gegen eingeschaltete sehr grosse Widerstände bezüglich ihrer telephonischen Wirkung.

c) Die Versuche 6 und 7 zeigen die grosse Reactionsfähigkeit des Telephons auf Influenzwirkungen.

d) Die Versuche 8 und 9 zeigen die Möglichkeit, aber auch die leichte Vermeidbarkeit zweier bei den übrigen Versuchen etwa denkbarer Fehlerquellen.

e) Der Versuch 10 entsprang der Absicht, mittels des Telephons Stellen verschiedener oder gleicher Spannung an einem und demselben Conductor aufzufinden. Wie aus der sich leicht bietenden Erklärung dieses Versuches hervorgeht, scheiterte jene Absicht an der ungenügenden Isolirung der Holzfassung des Telephons.

f) Versuch 11 zeigt die Neutralisirung zweier gleichzeitig auftretender Influenzwirkungen.

g) Die Versuche 13—15 geben die von Du Bois-Reymond¹⁾ mitgetheilten Versuche in abgeänderter Form wieder.

h) Ueber die in Versuch 16 besprochene Erscheinung wage ich nicht, mich bestimmter zu erklären. Bei Anwendung eines grössern Inductors mit besonders gut isolirtem Inductionsdraht schien eine gleichmässige Wirkung der beiden Pole aufzutreten. Da dieser Apparat indessen keinen selbstthätigen Interruptor besass, so musste von dessen weiterer Benutzung abgesehen werden. Uebrigens zeigte sich bei dem in den obigen Versuchen benutzten

1) Untersuchungen. Bd. I. p. 429. Vgl. auch G. Wiedemann, Galvanismus. II. p. 841.

Inductor die schwächere Polarität des Poles P_1 mit vollkommener Constanz.

i) Zur Erklärung des eigenthümlichen im Versuche 17 auftretenden Resultates wird folgende Vorstellung der Electricitätsbewegung im Inductionsreise festzuhalten sein. Bei jedem Inductionsstoss wird ein bestimmtes Quantum freier Electricität nach den beiden Polen P_1 und P_2 hingetrieben. Diese Quanta E_1 und E_2 gleichen sich theils durch rückläufige Bewegung innerhalb der Inductionspirale, theils durch gleichgerichtete Bewegung innerhalb des Schliessungsbogens aus. Hierbei tritt die besonders von Herwig hervorgehobene Verzögerung der Bewegung beim Uebergang in den Electrolyten ein. Der Versuch 17 würde sich demnach so erklären, dass der mit dem Pole P_2 verbundene Condensator eine erheblich viel stärkere Verzögerung an der Stelle p_2 bewirkt, als bei p_1 stattfindet.

k) Die Versuche 12 und 18 zeigen, dass die an den isolirten Polen des Inductors auftretenden hohen Spannungen freier Electricität auf eine minimale Grösse herabgesetzt werden, wenn der Inductionskreis auch nur durch einen ungemein schlechten Leiter geschlossen wird.

l) Zur Erklärung des Versuches 21 muss offenbar angenommen werden, dass die von dem Pole P_2 herrührende, zum Telephon gelangende Electricität von hoher Spannung ist und deshalb durch Handberührung abgeleitet werden konnte, während die von dem Pole P_1 kommende Electricität mindestens aus einem nicht ableitbaren, also niedrig gespannten Theile von Electricität bestand. Dieser Versuch, verglichen mit Versuch 19 und 20, zeigt daher eine Neutralisirung zweier Electricitätsmengen verschiedener Spannung. Es geht also hieraus als wahrscheinlich hervor, dass in einem nur durch Vermittelung eines Condensators mit dem Pole eines Inductors verbundenen Electrolyten nur Electricität hoher Spannung auftritt, während in einem durch metallische Leitung mit dem Pole des Inductors verbundenen Electrolyten jedenfalls eine Electricitätsbe-

wegung von geringer Spannung auftritt, vorausgesetzt, dass in beiden Fällen eine Ableitung des Electrolyten zur Erde ermöglicht ist. Die genannten Versuche scheinen daher die Annahme zu bekräftigen, dass die Rolle eines Electrolyten in einem Inductionskreise nicht allein in einer condensatorischen Wirksamkeit der Molecüle, sondern auch in einer wirklichen Leitungsfähigkeit besteht, welche letztere entweder als electrolytische Convection oder als rein galvanischer Vorgang aufgefasst werden muss. Der Versuch 22 scheint diese Ansicht erheblich zu unterstützen.

Kiel, Mai 1879.

XII. *Bemerkung über Extraströme in Eisendröhren; von Hermann Herwig.*

Im Junihefte der Annalen¹⁾ theilt Hr. Lorenz einen Versuch mit, wonach er an zwei verschieden dicken (1 mm und 2,2 mm) Eisendröhren nahezu gleiche Extraströme fand, und hebt den Widerspruch hervor, worin dieses Resultat zu einem gelegentlich früher von mir an Eisenstäben gefundenen²⁾ steht. Zur Erklärung fügt er hinzu, dass die von mir direct an einem Galvanometer vorgenommene Messung der Extraströme nur unsicher hätte ausfallen können. Diese Erklärung dürfte Hr. Lorenz indessen wohl kaum für eine genügende gehalten haben, wenn er bedacht hätte, dass nach meinen Angaben die entsprechenden Messungen mit derjenigen Empfindlichkeit gemacht sind, womit ein kleiner Drahtwiderstand bis auf $\frac{1}{100}$, resp. $\frac{1}{3600}$ seines Werthes bestimmt werden kann. Man vergleiche z. B. analoge Messungen des Hrn. Beetz³⁾, der

1) Wied. Ann. VII. p. 185. 1879.

2) Pogg. Ann. CLIII. p. 122. 1874.

3) Pogg. Ann. CXXVIII. p. 206. 1866.

als Genauigkeitsgrenze seiner Widerstandsbestimmungen $\frac{1}{180000}$ angibt.

Ich glaube vielmehr, dass man in dem äusserst complicirten Gebiete der magnetischen Induction ein einzelnes gefundenes Resultat überhaupt nicht ohne weiteres verallgemeinern darf. Das habe ich schon damals gleich genügend angedeutet und damit meinen Versuch eben als einen einzeln dastehenden charakterisirt, und weiterhin bin ich in dieser Auffassung ausserordentlich bestärkt worden, nachdem ich im Anschlusse an die in Rede stehenden Untersuchungen eine ausführliche Arbeit über den Circularmagnetismus verschiedener Eisenröhren vollendet hatte.¹⁾ Ich erhielt dabei das theilweise neue Resultat, dass die sogenannte Magnetisirungsfuction an demselben Eisenkörper nicht nur in stärkstem Maasse mit den äusseren magnetisirenden Kräften, sondern ebenso mit der Richtung der Magnetisirung, und dass sie ferner für verschiedene Eisenkörper, namentlich bei schwächeren Kräften, auch in hohem Grade mit dem Material veränderlich ist. Unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Quantitäten von remanentem Magnetismus, der bei der Circularmagnetisirung der Röhren beobachtet wurde, ergab sich, dass die äusseren magnetisirenden Kräfte dabei den molecularen Kräften gegenüber eine geradezu unbedeutende Rolle spielen. Zur Illustration des letztern Punktes dienten noch Versuche an discontinuirlich angeordneten Eisenmassen (namentlich Tabelle XI und XII), die ganz kürzlich Hr. v. Waltenhofen²⁾ durch Magnetisirung von Eisenpulver bestätigt hat.³⁾

Diese ausserordentliche Veränderlichkeit der Magnetisirungsfuction macht demnach alle Versuche, worin die

1) Pogg. Ann. CLVI. p. 430. 1875.

2) Wien. Anz. p. 2. 1879.

3) Ich selbst habe durch einen meiner Praktikanten schon vor mehreren Jahren absolute Messungen an pulverförmigen Eisenkörpern ausführen lassen, die Resultate aber nicht veröffentlicht, da sie lediglich eine Bestätigung meiner oben angezogenen früheren Versuche bildeten.

Function eintritt, in stärkstem Maasse veränderlich, und man könnte ganz wohl, wenn man mit ihr als einer Constanten rechnete, für verschiedene Versuche Resultate erhalten, die um das 10- und 20fache differiren.

Für die hier in Rede stehenden Versuche von Hrn. Lorenz einerseits und von mir andererseits dürften einige Punkte sogleich in die Augen springen, die eine völlige Unvergleichbarkeit der beiderseitigen Versuchsumstände darthun. Hr. Lorenz arbeitete mit sehr schwachen Stromstärken, folglich auch mit kleinen Werthen der Magnetisirungsfunction (die er selbst angibt), und ferner mit Strömen nur einer Richtung, wobei es also fraglich bleibt, wieviel remanenter Magnetismus im Spiele war. Diese Umstände sind besonders geeignet, die Veränderlichkeit der Function hervortreten zu lassen.

Ich dagegen habe mit viel stärkeren Strömen gearbeitet (alle Widerstände meiner Combination waren Bruchtheile einer Siemens-Einheit) und lediglich die sicheren Umkehrungsströme für die Berechnung berücksichtigt. Das dürfte nach den obigen Andeutungen zu besser vergleichbaren Versuchen geführt haben.

Indessen möchte ich, wie gesagt, keineswegs mein Resultat verallgemeinern, und glaube gern ebensowohl an die Richtigkeit der von Hrn. Lorenz ausgeführten Beobachtung, wie ich die Richtigkeit der meinigen festhalte. Beides muss als die Beobachtung eines Specialfalles angesehen werden, woraus keine allgemeinen Schlüsse gezogen werden dürfen.

Dem entsprechend habe ich auch in einer ganz kürzlich¹⁾ durchgeführten Untersuchung über den Einfluss der Drahtdicke auf Extraströme in Spulen lediglich nicht magnetische Drähte berücksichtigt, weil bei unserer jetzigen mangelhaften Kenntniss der Magnetisirungsfunction nur für solche Drähte die Bestimmungen mir ein allgemeines Interesse zu haben schienen.

Darmstadt, den 17. Juli 1879.

1) Wied. Ann. VII. p. 488. 1879.

XIII. *Ueber Phosphorescenzerscheinungen; von B. Stürtz in Bonn.*

In Gemeinschaft mit Fz. Müller, Dr. Geissler's Nachfolger, habe ich die in Bd. III, St. 7 der Beiblätter zu den Annalen besprochenen Versuche von Crookes und Maskelyne über Phosphorescenzerscheinungen im hohen Vacuum auf eine Reihe von Substanzen ausgedehnt, von welchen die nachbenannten Phosphorescenzen ergeben haben.

Die hierunter mit einem * bezeichneten Substanzen wurden geglüht, bevor sie in die Röhre kamen; im gewöhnlichen Zustande zeigten dieselben keine, oder nur Spuren von Phosphorescenz.

Brucit*, Magnesit*, phosphorsaure Magnesia, Uranpecherz, Wolframit, Cerussit, Adular, Orthoklas*, Kaolin*, Axinit*, Kieselzink*, Zinkspath*, Doppelspath, Apatit, Franklinit, Lasurstein, Fergusonit*, Apophyllit*, Dolomit, Coelestin*, rother Spinell, Cobaltglanz, Stannit, Baryt, Chromeisenstein, Lazulith, Lepidolith, Zinnwaldit, Ankerit, Greenockit, Pektolith, Borax, Zinnober, Leucit, Sanidin und Meteorstein von Java 1869.

Wenige leuchtende Punkte wurden an Krystallen von Arsenkies und Antimonit beobachtet. Geglühte Stücke einer phosphorescirenden Substanz leuchten mit anderer Farbe wie nicht geglühte derselben Art. So phosphoresciren undurchsichtige Zirkonkrystalle von Miask im gewöhnlichen Zustande mit sammetartiger gelber Farbe, während geglühte Krystalle in ähnlicher Weise wie der Hyacinth roth leuchten.

Beim Cerussit geht die Phosphorescenz durch Glühen verloren.

Epidot, Türkis, Idocras, Proustit, Azurit, Silber, Galenit, Mesotyp, Pyrrhotin, Bronzit, Perowskit, Senarmontit, Manganit, Pyrolusit, Manganspath, Ilvait, Antigorit, Speiskobalt, Realgar, Pyromorphit, Pennin, Talk, Rutil, Blende, Diopsid, Eisenglanz, Magnetit, Gold, Kupfer, Pyrit, Amianth, Labrador, Kupferkies, Vivianit, Limonit, Schwefel, Chamoisit, Libethenit, Analcim, Prehnit, Muscovit, Boulangerit, Anhydrit, Datolith und Cuprit phosphoresciren nicht.